Las Matemáticas en la Economía.

Segunda parte: Más matemáticas.

Josefa M. García Hernández.

8 de Julio de 2013.

Un ejemplo de ecuación en diferencias

La capitalización compuesta se puede expresar mediante una ecuación en diferencias.

Un ejemplo de ecuación en diferencias

La capitalización compuesta se puede expresar mediante una ecuación en diferencias.

El fundamento es: $\boxed{C_{n+1} - C_n = i\, C_n}$

Un ejemplo de ecuación en diferencias

La capitalización compuesta se puede expresar mediante una ecuación en diferencias.

El fundamento es: $\boxed{C_{n+1} - C_n \; = \; i\, C_n}$

Es una ecuación en diferencias lineal y homogénea:
$C_{n+1} \; = \; C_n(1+i)$.

Un ejemplo de ecuación en diferencias

La capitalización compuesta se puede expresar mediante una ecuación en diferencias.

El fundamento es: $\boxed{C_{n+1} - C_n \;=\; i\, C_n}$

Es una ecuación en diferencias lineal y homogénea:
$C_{n+1} \;=\; C_n(1+i)$.

Es claro que se trata de la conocida progresión geométrica:
$C_o,\; C_o(1+i),\; C_o(1+i)^2,\; \cdots\cdots$

Un ejemplo de ecuación diferencial

Pensemos en una capitalización continua con tanto de interés i.
Se considera que i es un tanto nominal capitalizable por *instantes*.

Un ejemplo de ecuación diferencial

Pensemos en una capitalización continua con tanto de interés i.
Se considera que i es un tanto nominal capitalizable por *instantes*.

Si fuera por años: $C_{t+1} - C_t = i\, C_t$

Un ejemplo de ecuación diferencial

Pensemos en una capitalización continua con tanto de interés i.
Se considera que i es un tanto nominal capitalizable por *instantes*.

Si fuera por años: $C_{t+1} - C_t = i\, C_t$

Si fuera por meses: $C_{t+\frac{1}{12}} - C_t = \dfrac{i}{12}\, C_t$

Un ejemplo de ecuación diferencial

Pensemos en una capitalización continua con tanto de interés i.
Se considera que i es un tanto nominal capitalizable por *instantes*.

Si fuera por años: $C_{t+1} - C_t = i\, C_t$

Si fuera por meses: $C_{t+\frac{1}{12}} - C_t = \dfrac{i}{12}\, C_t$

Si fuera por k-ésimos de año: $C_{t+\frac{1}{k}} - C_t = \dfrac{i}{k}\, C_t$

Un ejemplo de ecuación diferencial

Pensemos en una capitalización continua con tanto de interés i.
Se considera que i es un tanto nominal capitalizable por *instantes*.

Si fuera por años: $C_{t+1} - C_t = i\, C_t$

Si fuera por meses: $C_{t+\frac{1}{12}} - C_t = \dfrac{i}{12}\, C_t$

Si fuera por k-ésimos de año: $C_{t+\frac{1}{k}} - C_t = \dfrac{i}{k}\, C_t$

Llamando $h = 1/k$: $\dfrac{C(t+h) - C(t)}{h} = i\, C(t)$

Un ejemplo de ecuación diferencial

Pensemos en una capitalización continua con tanto de interés i. Se considera que i es un tanto nominal capitalizable por *instantes*.

Si fuera por años: $C_{t+1} - C_t = i\, C_t$

Si fuera por meses: $C_{t+\frac{1}{12}} - C_t = \dfrac{i}{12}\, C_t$

Si fuera por k-ésimos de año: $C_{t+\frac{1}{k}} - C_t = \dfrac{i}{k}\, C_t$

Llamando $h = 1/k$: $\dfrac{C(t+h) - C(t)}{h} = i\, C(t)$

Si fuera por *instantes* (hay que tomar el límite cuando $k \to +\infty$, o equivalentemente, cuando $h \to 0$):

$$\lim_{h\to 0} \frac{C(t+h) - C(t)}{h} = i\, C(t) \quad \text{o sea} \quad \boxed{C'(t) = i\, C(t)}$$

Un ejemplo de ecuación diferencial

Pensemos en una capitalización continua con tanto de interés i.
Se considera que i es un tanto nominal capitalizable por *instantes*.

Si fuera por años: $C_{t+1} - C_t = i\, C_t$

Si fuera por meses: $C_{t+\frac{1}{12}} - C_t = \dfrac{i}{12}\, C_t$

Si fuera por k-ésimos de año: $C_{t+\frac{1}{k}} - C_t = \dfrac{i}{k}\, C_t$

Llamando $h = 1/k$: $\dfrac{C(t+h) - C(t)}{h} = i\, C(t)$

Si fuera por *instantes* (hay que tomar el límite cuando $k \to +\infty$, o equivalentemente, cuando $h \to 0$):

$$\lim_{h \to 0} \frac{C(t+h) - C(t)}{h} = i\, C(t) \quad \text{o sea} \quad \boxed{C'(t) = i\, C(t)}$$

Es una ecuación diferencial lineal homogénea.
Su solución es $C(t) = C_o\, e^{it}$

Función de oferta. Función de demanda.

La **función de oferta** representa la cantidad q que están dispuestos a vender los productores de un bien dependiendo del precio p de éste.

Función de oferta. Función de demanda.

La **función de oferta** representa la cantidad q que están dispuestos a vender los productores de un bien dependiendo del precio p de éste.

Tiene el aspecto $q = O(p)$.
Es creciente. (A mayor precio, mayor cantidad ofrecida)

Función de oferta. Función de demanda.

La **función de oferta** representa la cantidad q que están dispuestos a vender los productores de un bien dependiendo del precio p de éste.

Tiene el aspecto $q = O(p)$.
Es creciente. (A mayor precio, mayor cantidad ofrecida)

Se suponen fijas las demás variables que pueden influir en la cantidad ofertada, como, por ejemplo, los costes de producción.

Función de oferta. Función de demanda.

La **función de oferta** representa la cantidad q que están dispuestos a vender los productores de un bien dependiendo del precio p de éste.

Tiene el aspecto $q = O(p)$.
Es creciente. (A mayor precio, mayor cantidad ofrecida)

Se suponen fijas las demás variables que pueden influir en la cantidad ofertada, como, por ejemplo, los costes de producción.

La **función de demanda** indica cuánto están dispuestos a comprar los consumidores de un bien dependiendo de cuál sea su precio.

Función de oferta. Función de demanda.

La **función de oferta** representa la cantidad q que están dispuestos a vender los productores de un bien dependiendo del precio p de éste.

Tiene el aspecto $q = O(p)$.
Es creciente. (A mayor precio, mayor cantidad ofrecida)

Se suponen fijas las demás variables que pueden influir en la cantidad ofertada, como, por ejemplo, los costes de producción.

La **función de demanda** indica cuánto están dispuestos a comprar los consumidores de un bien dependiendo de cuál sea su precio.

Tiene el aspecto $q = D(p)$
Es decreciente. (A mayor precio, menor cantidad demandada).

Función de oferta. Función de demanda.

La **función de oferta** representa la cantidad q que están dispuestos a vender los productores de un bien dependiendo del precio p de éste.

Tiene el aspecto $q = O(p)$.
Es creciente. (A mayor precio, mayor cantidad ofrecida)

Se suponen fijas las demás variables que pueden influir en la cantidad ofertada, como, por ejemplo, los costes de producción.

La **función de demanda** indica cuánto están dispuestos a comprar los consumidores de un bien dependiendo de cuál sea su precio.

Tiene el aspecto $q = D(p)$
Es decreciente. (A mayor precio, menor cantidad demandada).

Se suponen fijas las demás variables que pueden influir en la demanda, como por ejemplo, los precios de otros bienes relacionados con él.

Ejemplo

En los Estados Unidos en 1981 la función de oferta de trigo era, aproximadamente,

$$q = O(p) = 1800 + 240p$$

donde el precio está en dólares por *bushel* y la cantidad en millones de *bushels* en dicho año.

El *bushel* es una unidad de medida de peso o volumen usual en países anglosajones. Un bushel de trigo son 60 libras, o sea poco más de 27 kilos.

Ejemplo

En los Estados Unidos en 1981 la función de oferta de trigo era, aproximadamente,

$$q = O(p) = 1800 + 240p$$

donde el precio está en dólares por *bushel* y la cantidad en millones de *bushels* en dicho año.

El *bushel* es una unidad de medida de peso o volumen usual en países anglosajones. Un bushel de trigo son 60 libras, o sea poco más de 27 kilos.

Ejemplo

En el mismo país y el mismo año, la función de demanda de trigo era, aproximadamente,

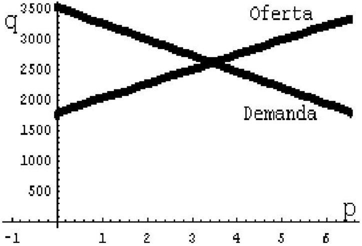
$$q = D(p) = 3550 - 266p$$

Equilibrio del mercado.

El equilibrio del mercado se consigue cuando las cantidades de la oferta y de la demanda coinciden.

$1800 + 240p = 3550 - 266p \quad \rightarrow \quad 506p = 1750 \quad \rightarrow$
$\rightarrow \quad p = 3.46$ dólares por unidad.

Entonces $q = 1800 + 240(3.46) = 2630$ millones de *bushels*.



En Economía se usan a menudo las derivadas.
A veces como un mero lenguaje.

Derivadas

En Economía se usan a menudo las derivadas.
A veces como un mero lenguaje.

Por ejemplo, se consideran dos bienes relacionados.
La cantidad demandada de cada bien depende no sólo del precio de dicho bien sino también del precio del otro.

$$q_1 = D_1(p_1, p_2), \qquad q_2 = D_2(p_1, p_2)$$

Obsérvese que ahora tenemos no una sola curva de demanda para el bien 1, sino infinitas, una para cada valor que se considere para p_2.

Lo mismo ocurre con el bien 2.

Bienes sustitutivos

Se dice que los dos bienes son **sustitutivos** cuando la subida del precio de uno de ellos provoca un aumento de la cantidad demandada del otro.

Bienes sustitutivos

Se dice que los dos bienes son **sustitutivos** cuando la subida del precio de uno de ellos provoca un aumento de la cantidad demandada del otro.

Ejemplos:

- El aceite de girasol y el aceite de oliva.
- El cobre y el aluminio.

Se dice que los dos bienes son **sustitutivos** cuando la subida del precio de uno de ellos provoca un aumento de la cantidad demandada del otro.

Ejemplos:

- El aceite de girasol y el aceite de oliva.
- El cobre y el aluminio.

Una forma frecuente de expresar esto es mediante derivadas.

La definición entonces es:

Bienes sustitutivos

Dos bienes son sustitutivos cuando

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} > 0, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0$$

Bienes complementarios

Se dice que dos bienes son **complementarios** cuando la subida del precio de uno de ellos provoca una disminución de la cantidad demandada del otro.

Bienes complementarios

Se dice que dos bienes son **complementarios** cuando la subida del precio de uno de ellos provoca una disminución de la cantidad demandada del otro.

Ejemplos:

- Los coches y la gasolina.
- Los ordenadores y los programas informáticos.

Bienes complementarios

Se dice que dos bienes son **complementarios** cuando la subida del precio de uno de ellos provoca una disminución de la cantidad demandada del otro.

Ejemplos:

- Los coches y la gasolina.
- Los ordenadores y los programas informáticos.

La definición usando derivadas es:

Bienes complementarios

Dos bienes son complementarios cuando

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} < 0, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} < 0$$

El primero que introdujo las derivadas en la Economía fué Cournot, matemático francés (1801-1877).
Vivió la época de formalización del Cálculo matemático.
Fué el impulsor de la teoría del marginalismo, que es una matematización de la teoría económica.

La derivada y las funciones económicas.

El primero que introdujo las derivadas en la Economía fué Cournot, matemático francés (1801-1877).
Vivió la época de formalización del Cálculo matemático.
Fué el impulsor de la teoría del marginalismo, que es una matematización de la teoría económica.

Después de él, muchos matemáticos se han reconvertido en economistas de éxito.
De hecho, muchos premios Nobel de Economía son matemáticos.
Cournot introdujo conceptos como el de coste marginal, definiéndolo como una derivada.

El coste marginal

Se considera $C(x)$, función de coste total de una empresa que produce un bien.
x es el número de unidades producidas.
x puede tomar valores discretos o continuos(=en un intervalo).

El coste marginal

Se considera $C(x)$, función de coste total de una empresa que produce un bien.
x es el número de unidades producidas.
x puede tomar valores discretos o continuos(=en un intervalo).

Dependiendo de eso, se define el coste marginal como

- *Caso discreto:* El coste de producir una unidad más. O sea, $C(x+1) - C(x)$.
- *Caso continuo:* La derivada del coste total. O sea, $C'(x)$.

El coste marginal

Se considera $C(x)$, función de coste total de una empresa que produce un bien.
x es el número de unidades producidas.
x puede tomar valores discretos o continuos(=en un intervalo).

Dependiendo de eso, se define el coste marginal como

- *Caso discreto:* El coste de producir una unidad más. O sea, $C(x+1) - C(x)$.
- *Caso continuo:* La derivada del coste total. O sea, $C'(x)$.

En el caso continuo,

- aunque se define el coste marginal como derivada,
- se suele interpretar como el *coste de producir una unidad más*.

El coste marginal

Según la definición, el coste marginal en un determinado punto x es

$$C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$$

Tomando $h = 1$, $C'(x) \approxeq C(x+1) - C(x)$.
Por tanto, existe una ligera diferencia entre las dos definiciones de coste marginal.

Ejemplo

La función de coste total de un fabricante es $C(x) = 0.1x^2 + 6x + 300$. Se pide

1. Halle la función de coste marginal.
2. Halle el coste marginal para $x = 20$.
3. Interprete el valor de dicho coste marginal.

Ejemplo

La función de coste total de un fabricante es $C(x) = 0.1x^2 + 6x + 300$. Se pide

1. Halle la función de coste marginal.
2. Halle el coste marginal para $x = 20$.
3. Interprete el valor de dicho coste marginal.

---

1. $C'(x) = 0.2x + 6$.
2. En particular $C'(20) = 10$.
3. Se interpreta como el coste de producir una unidad más (pasar de $x = 20$ a $x = 21$).

Debemos observar que, en general, el coste marginal depende del punto x.

Debemos observar que, en general, el coste marginal depende del punto x.

NOTA

Cuando la función de coste total es lineal[a], es decir, es de la forma $C(x) = mx + b$, entonces el coste marginal es $C'(x) = m$. El valor m es la pendiente y no depende del punto x. Además, coincide exactamente con el coste de producir una unidad más.

[a] Los economistas llaman *lineales* al tipo de funciones que los matemáticos llamamos *afines*

Minimización del coste medio.

Si el coste total de producir x unidades de un bien es $C(x)$, entonces el coste medio es $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
(Obsérvese que para $x = 0$ no está definido el coste medio.)

Ejemplo

La función de coste total de una mercancía es
$C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 100$.
Queremos saber qué valor de x minimiza el coste medio.
La función de coste medio es

$$A(x) = \frac{\frac{1}{4}x^2 + 4x + 100}{x} = \frac{1}{4}x + 4 + \frac{100}{x}$$

Calculamos la derivada:

Ejemplo

$$A'(x) = \frac{1}{4} - \frac{100}{x^2}$$

Buscamos los puntos críticos:

$$A'(x) = 0 \iff \frac{1}{4} - \frac{100}{x^2} = 0 \iff \frac{1}{4} = \frac{100}{x^2} \iff$$

$$x^2 = 400 \iff x = \pm 20$$

El único punto crítico es $x = 20$.

Para ver si es máximo o mínimo, hallamos la segunda derivada.
$A''(x) = \dfrac{200}{x^3}$.
Vemos que $A''(20) > 0$. Esto nos dice que en el punto crítico $x = 20$ se alcanza realmente un mínimo (local y) global.

El valor mínimo es $A(20) = \frac{1}{4}(20) + 4 + \frac{100}{20} = 14$.

Ejemplo

Función de coste medio $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, definida en el intervalo $(0, +\infty)$.

Punto x en el cual el coste medio es mínimo.

Debe ser un punto crítico de la función de coste medio.

Debe cumplir que $A'(x) = 0$.

Ejemplo

Función de coste medio $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, definida en el intervalo $(0, +\infty)$.
Punto x en el cual el coste medio es mínimo.
Debe ser un punto crítico de la función de coste medio.
Debe cumplir que $A'(x) = 0$. ¿En qué se traduce esto?

Ejemplo

Función de coste medio $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, definida en el intervalo $(0, +\infty)$.
Punto x en el cual el coste medio es mínimo.
Debe ser un punto crítico de la función de coste medio.
Debe cumplir que $A'(x) = 0$. ¿En qué se traduce esto?

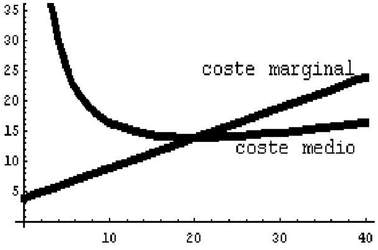
$$A'(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C'(x)x - C(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad C'(x) = \frac{C(x)}{x} (= A(x))$$

O sea, $\boxed{A'(x) = 0}$ equivale a $\boxed{C'(x) = A(x)}$.

De ahí que en Teoría Económica se diga que *en el punto de coste medio mínimo, el coste medio coincide con el coste marginal.*

En el ejemplo de antes:



En un equipo de baloncesto, si se ficha a un nuevo jugador cuya altura es superior a la media del equipo, la media sube. Y si la altura del jugador es menor que la media del equipo, la media baja.
Si coste medio $>$ coste marginal, interesa producir más para que baje el coste medio.
Si coste medio $<$ coste marginal, interesa producir menos para que baje el coste medio.
Pero si coste medio $=$ coste marginal no interesa producir ni más ni menos.

¿Por qué es importante el mínimo del coste medio?

Supongamos que el precio del bien, p, está fijado.
Y que la empresa produce la cantidad que hace mínimo su coste medio.
Y que vende todo lo que produce.

[1]Esto no es malo. Cuando se habla de beneficio, realmente se habla de *beneficio extraordinario*. El beneficio digamos *normal* como la remuneración del propietario o de los capitalistas está incluida en los costes

Supongamos que el precio del bien, p, está fijado.
Y que la empresa produce la cantidad que hace mínimo su coste medio.
Y que vende todo lo que produce.

Entonces, si dicho coste medio es menor que p, la empresa tendrá beneficios.
Si el coste medio es menor que p, tendrá pérdidas.
Y si el coste medio es igual a p, no tendrá ni beneficios ni pérdidas[1].

[1] Esto no es malo. Cuando se habla de beneficio, realmente se habla de *beneficio extraordinario*. El beneficio digamos *normal* como la remuneración del propietario o de los capitalistas está incluida en los costes

Una versión de la derivada: la elasticidad

Se quiere estudiar la sensibilidad de la demanda de un cierto bien ante variaciones en el precio.

Se quiere estudiar la sensibilidad de la demanda de un cierto bien ante variaciones en el precio.

Podemos preguntarnos: si el precio aumenta en un $1\,\%$, ¿cuál será la variación porcentual de la cantidad demandada?

Este número se llama *elasticidad de la demanda* o también *elasticidad demanda-precio*.

Una versión de la derivada: la elasticidad

Se quiere estudiar la sensibilidad de la demanda de un cierto bien ante variaciones en el precio.

Podemos preguntarnos: si el precio aumenta en un 1 %, ¿cuál será la variación porcentual de la cantidad demandada?

Este número se llama *elasticidad de la demanda* o también *elasticidad demanda-precio*.

Si, por ejemplo, la elasticidad de la demanda de mantequilla es -2, eso significa que un aumento del precio de la mantequilla en un 1 % conllevaría una disminución de la cantidad demandada en un 2 %. (Y una disminución del 3 % en el precio de la mantequilla provocaría un aumento del 6 % en la cantidad demandada).

Si la elasticidad de la demanda de patatas es -0.2, un aumento de un 1 % en el precio de las patatas provocaría una disminución de la cantidad demandada de sólo un 0.2 %.

Una versión de la derivada: la elasticidad

Vamos a definir con más detalle la elasticidad.
¿Qué significa que un precio aumente en un 1 %?
Por ejemplo, se parte de un precio $p = 2000$.
Aumenta $\dfrac{1}{100}(2000) = 20$.
Es decir, el precio se incrementa en $\Delta p = 20$ unidades monetarias.
El nuevo precio sería de $p + \Delta p = 2020$.

Una versión de la derivada: la elasticidad

Vamos a definir con más detalle la elasticidad.
¿Qué significa que un precio aumente en un 1 %?
Por ejemplo, se parte de un precio $p = 2000$.
Aumenta $\dfrac{1}{100}(2000) = 20$.
Es decir, el precio se incrementa en $\Delta p = 20$ unidades monetarias.
El nuevo precio sería de $p + \Delta p = 2020$.

Obsérvese que $\dfrac{\Delta p}{p} = \dfrac{20}{2000} = \dfrac{1}{100} = 0.01$.

Decir que p aumenta un 1 % significa justamente que $\dfrac{\Delta p}{p} = 0.01$.
Y decir que p aumenta un 5 % significaría que $\dfrac{\Delta p}{p} = \dfrac{5}{100} = 0.05$.

Así que $\Delta p / p$ significa el cambio porcentual (expresado no en tanto por ciento, sino en tanto por uno) que experimenta el precio.

Supongamos que la demanda del bien se puede describir por la función

$$q = D(p)$$

Cuando el precio varía de p a $p + \Delta p$, la cantidad demandada también cambia. La variación absoluta de q es $\Delta q = f(p + \Delta p) - f(p)$. Y la variación porcentual de q es entonces

$$\frac{\Delta q}{q}$$

Una versión de la derivada: la elasticidad

Supongamos que la demanda del bien se puede describir por la función

$$q = D(p)$$

Cuando el precio varía de p a $p + \Delta p$, la cantidad demandada también cambia. La variación absoluta de q es $\Delta q = f(p + \Delta p) - f(p)$. Y la variación porcentual de q es entonces

$$\frac{\Delta q}{q}$$

La razón entre la variación porcentual de q y la variación porcentual de p es:

$$\frac{\text{cambio porcentual en } q}{\text{cambio porcentual en } p} = \frac{\Delta q / q}{\Delta p / p} = \frac{p}{q} \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{p}{q} \frac{D(p + \Delta p) - D(p)}{\Delta p}$$

El valor anterior se llama *elasticidad-arco* de la demanda en el intervalo $[p, p + \Delta p]$.

Una versión de la derivada: la elasticidad

$$\frac{\text{cambio porcentual en } q}{\text{cambio porcentual en } p} = \frac{p}{q}\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{p}{q}\frac{D(p+\Delta p) - D(p)}{\Delta p}$$

Elasticidad puntual

Es el límite del cociente anterior cuando Δp tiende a cero.

Cuando Δp tiende a cero, el cociente $[D(p+\Delta p) - D(p)]/\Delta p$ tiende a la derivada $D'(p) = \dfrac{dq}{dp}$.

Por tanto, la *elasticidad (puntual) de la demanda en el punto p* es

$$\epsilon = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

Una versión de la derivada: la elasticidad

Hay tres categorías de elasticidad.

1. Cuando $|\epsilon| > 1$ se dice que la demanda es **elástica**.
2. Cuando $|\epsilon| < 1$ se dice que la demanda es **inelástica**.
3. Cuando $|\epsilon| = 1$ se dice que la demanda tiene **elasticidad unitaria**.

Una versión de la derivada: la elasticidad

Hay tres categorías de elasticidad.

1. Cuando $|\epsilon| > 1$ se dice que la demanda es **elástica**.
2. Cuando $|\epsilon| < 1$ se dice que la demanda es **inelástica**.
3. Cuando $|\epsilon| = 1$ se dice que la demanda tiene **elasticidad unitaria**.

¿Qué significa que la demanda sea elástica? Que es muy sensible a los cambios en el precio (La cantidad varía con respecto al precio más que proporcionalmente.)

Una versión de la derivada: la elasticidad

Hay tres categorías de elasticidad.

1. Cuando $|\epsilon| > 1$ se dice que la demanda es **elástica**.
2. Cuando $|\epsilon| < 1$ se dice que la demanda es **inelástica**.
3. Cuando $|\epsilon| = 1$ se dice que la demanda tiene **elasticidad unitaria**.

¿Qué significa que la demanda sea elástica? Que es muy sensible a los cambios en el precio (La cantidad varía con respecto al precio más que proporcionalmente.)

¿Qué significa que sea inelástica? Que es poco sensible a los cambios. (Que varía menos que proporcionalmente con el precio.)

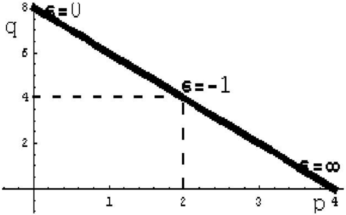
Una versión de la derivada: la elasticidad

Ejemplo

Supongamos que la función de demanda es lineal.
Por ejemplo, $q = 8 - 2p$.

La elasticidad es: $\epsilon = \dfrac{p}{q}\dfrac{dq}{dp} = \dfrac{-2p}{q}$

La elasticidad depende del punto.
¿Cuándo vale -1? Cuando $q = 2p$. Entonces $8 - 2p = 2p$ y $(p, q) = (2, 4)$. Es el punto medio.



Ejes cambiados

¿Hay funciones con elasticidad constante? Sí. La siguiente es un ejemplo.

Ejemplo

La demanda de un cierto bien viene dada por la fórmula

$$q = D(p) = 4000p^{-1.5}$$

Vamos a hallar la elasticidad. Primero, la derivada:

$$\frac{dq}{dp} = D'(p) = 4000 \cdot (-1.5)p^{-1.5-1} = -6000p^{-2.5}$$

La elasticidad de la demanda es:

$$\epsilon = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{4000p^{-1.5}} \cdot (-6000)\, p^{-2.5} = e\frac{-6000 \cdot p \cdot p^{-2.5}}{4000 \cdot p^{-1.5}} = -1.5$$

La elasticidad es constante igual a -1.5.

Una versión de la derivada: la elasticidad

Existen muchos factores que influyen en la elasticidad de la demanda.

- Si una mercancía es fácilmente sustituible, su demanda es elástica.
- Para los artículos de primera necesidad la demanda es inelástica.
- Dentro un un determinado artículo, la elasticidad depende del punto (=precio) en el que estemos. En líneas generales, a mayor precio, mayor elasticidad (en valor absoluto).
- La elasticidad a corto plazo es distinta que a largo plazo.

Una versión de la derivada: la elasticidad

Existen muchos factores que influyen en la elasticidad de la demanda.

- Si una mercancía es fácilmente sustituible, su demanda es elástica.
- Para los artículos de primera necesidad la demanda es inelástica.
- Dentro un un determinado artículo, la elasticidad depende del punto (=precio) en el que estemos. En líneas generales, a mayor precio, mayor elasticidad (en valor absoluto).
- La elasticidad a corto plazo es distinta que a largo plazo.

La demanda de gasolina en Estados Unidos se estima que tiene una elasticidad a corto plazo (un año) de -0.11.
Pero a largo plazo (veinte años) es de -1.17.

Una versión de la derivada: la elasticidad

Existen muchos factores que influyen en la elasticidad de la demanda.

- Si una mercancía es fácilmente sustituible, su demanda es elástica.
- Para los artículos de primera necesidad la demanda es inelástica.
- Dentro un un determinado artículo, la elasticidad depende del punto (=precio) en el que estemos. En líneas generales, a mayor precio, mayor elasticidad (en valor absoluto).
- La elasticidad a corto plazo es distinta que a largo plazo.

La demanda de gasolina en Estados Unidos se estima que tiene una elasticidad a corto plazo (un año) de -0.11.
Pero a largo plazo (veinte años) es de -1.17.

En cambio la demanda de automóviles tiene una elasticidad a corto plazo de -1.20 y a largo de -0.40.

Definición general de elasticidad

Dada una función $y = f(x)$ derivable en x y tal que $f(x) \neq 0$, se define la *elasticidad* de f con respecto a x como

$$El_x f(x) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{f(x)}\, f'(x)$$

Elasticidad demanda-renta.
Elasticidad oferta-precio.

Análisis de insumo-producto de Leontief

Los modelos de insumo-producto (también llamados input-output) fueron desarrollados por Wassily W. Leontief.

Estos modelos analizan las interrelaciones entre los diferentes sectores, que integran la economía de un país.

El objetivo de estos modelos es predecir los niveles de producción de los diversos sectores a fin de satisfacer las demandas futuras.

Análisis de insumo-producto de Leontief

Consideremos un ejemplo hipotético de un país en el que sólo haya dos sectores, $S1$ y $S2$.
Los datos de un determinado año aparecen en la siguiente **tabla de insumo-producción**.

	Insumos del sector $S1$	**Insumos del sector $S2$**	**Demandas finales**	**Producciones totales**
Producción de $S1$	60	64	76	200
Producción de $S2$	100	48	12	160
Insumos primarios	40	48	—	—
Insumos totales	200	160	—	—

Los datos vienen expresados en unidades monetarias (por ejemplo, millones de euros) y corresponden a un período de un año.

En el modelo se supone que todo lo que se produce se consume. En otras palabras, se supone que **la producción total de cada sector es igual a su insumo total**.

Observamos que el sector $S1$ fabrica productos por valor de 200 unidades monetarias.
Para ello necesita 60 unidades de su propia producción, 100 del otro sector, $S2$ y 40 de insumos primarios.

Por tanto, para producir por valor de **una** unidad monetaria, el sector $S1$ necesita gastar:
$60/200$ en el propio $S1$,
$100/200$ en $S2$ y
$40/200$ en insumos primarios.
Podemos razonar análogamente para el sector $S2$.

Análisis de insumo-producto de Leontief

Se obtiene así la siguiente tabla que muestra cómo se distribuye cada unidad monetaria que gasta cada uno de los dos sectores.

	$S1$	$S2$		$S1$	$S2$
$S1$	$\frac{60}{200}$	$\frac{64}{160}$		0.3	0.4
$S2$	$\frac{100}{200}$	$\frac{48}{160}$	$=$	0.5	0.3
Insumos primarios	$\frac{40}{200}$	$\frac{48}{160}$		0.2	0.3

Cada columna de la tabla anterior suma 1.

La matriz cuadrada formada por las dos primeras filas de la tabla anterior, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

es importante. Se llama **matriz tecnológica**.

La tabla de insumo producción dada permite obtener la matriz tecnológica de la siguiente manera.

	$S1$	$S2$	D.F.	Prod. total
$S1$	60	64	76	200
$S2$	100	48	12	160
Insumos primarios	40	48	—	—
Insumos totales	200	160	—	—

$\longrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{60}{200} & \frac{64}{160} \\ \\ \frac{100}{200} & \frac{48}{160} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Análisis de insumo-producto de Leontief

Si conocemos la matriz tecnológica, A, y las producciones totales, podemos recuperar la tabla de insumo-producción.

Supongamos que la matriz es $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$ y que las producciones totales son 100 para $S1$ y 80 para $S2$.

Entonces podemos completar la tabla de insumo producción así.

	$S1$	$S2$	D.F.	Prod. total
$S1$	0.2(100)	0.7(80)		100
$S2$	0.5(100)	0.1(80)		80
Insumos primarios			—	—
Insumos totales	100	80	—	—

Análisis de insumo-producto de Leontief

	$S1$	$S2$	D.F.	Prod. total
$S1$	0.2(100)	0.7(80)		100
$S2$	0.5(100)	0.1(80)		80
Insumos primarios			—	—
Insumos totales	100	80	—	—

	$S1$	$S2$	D.F.	P.T.
$S1$	20	56	24	100
$S2$	50	8	22	80
I.P.	30	16	—	—
I.T.	100	80	—	—

Si conocemos la matriz tecnológica y las demandas finales, ¿podemos hallar cuál debe ser la producción total? Si, pero no es trivial.

Supongamos que la matriz es $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$ y que las demandas finales son 210 para $S1$ y 330 para $S2$.

Queremos saber cuáles deben ser las producciones totales, llamémoslas x_1 y x_2, necesarias para satisfacer las demandas finales, además de las demandas internas de los propios sectores.

Observamos que la producción total del Sector 1 se puede desglosar en suma de: la parte de esta producción consumida por el propio $S1$ **más** la parte de esta producción consumida por $S2$ **más** la parte destinada a la demanda final.

Es decir, debe ser:

$$\underbrace{x_1}_{\text{prod. total de } S1} = \underbrace{0.2\,x_1}_{\text{parte consumida por } S1} + \underbrace{0.5\,x_2}_{\text{parte cons. por } S2} + \underbrace{210}_{\text{dem. final}}$$

y, razonando similarmente para el sector 2,

$$x_2 = 0.6\,x_1 + 0.3\,x_2 + 330$$

Tenemos así el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 0.2\,x_1 & + & 0.5\,x_2 & + & 210 \\ x_2 & = & 0.6\,x_1 & + & 0.3\,x_2 & + & 330 \end{array}\right\}$$

El sistema se puede escribir en forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 210 \\ 330 \end{pmatrix}$$

Si llamamos

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 210 \\ 330 \end{pmatrix}$$

tenemos que:

$$\boxed{X = AX + D}$$

$$\boxed{X = AX + D}$$

de donde: $X - AX = D$, o, lo que es lo mismo, $IX - AX = D$ (donde I es la matriz identidad) y, sacando X factor común,

$$(I - A) \cdot X = D$$

En caso de que el determinante de $(I - A)$ sea no nulo, existe la inversa $(I - A)^{-1}$. Podemos despejar:

$$\boxed{X = (I - A)^{-1} \cdot D}$$

Las matrices columna X y D representan las **producciones totales** y las **demandas finales** respectivamente,
A es la matriz tecnológica.
La matriz $I - A$ se llama **matriz de Leontief**.
La matriz $(I - A)^{-1}$ se llama **matriz inversa de Leontief**.

Hacemos los cálculos:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.5 \\ -0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es $\det(I - A) = 0.26 \neq 0$.
Calculamos su matriz inversa:

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{0.26} \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} = \frac{100}{26} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} = \frac{10}{26} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} =$$

Por tanto, la producción será:

$$X = (I - A)^{-1} \cdot D = \frac{5}{13} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

Esto significa que el sector 1 debe producir por valor de 1200 unidades monetarias y el sector 2 por valor de 1500 unidades monetarias.