Las Matemáticas en la Economía.

Primera parte: Matemática Financiera.

Josefa M. García Hernández.

8 de Julio de 2013.

El estudio de la Matemática Financiera tiene una gran importancia. Y es aplicable en la vida cotidiana, ya que sirve, por ejemplo, para:

- Decidir cuál es la inversión más rentable.
- Elegir la financiación menos costosa.

Ejemplo inicial

Ejemplo

Supongamos que colocamos 1.000 euros en un banco que abona un 8 % de interés anual.

Calcular el montante que tendremos al cabo de dos años en los siguientes supuestos:

1. Los intereses producidos durante el primer año no se tienen en cuenta para el cálculo de los intereses del segundo año.
2. Los intereses producidos durante el primer año se acumulan al capital para producir nuevos intereses durante el segundo año.

Ejemplo inicial

$C_0 = 1000$ euros
$8\,\%$ anual

En el primer caso: (Interés simple)

Intereses del primer año: $0.08 \cdot 1000 = 80$ euros.

Intereses del segundo año: $0.08 \cdot 1000 = 80$ euros.

Al cabo de dos años tendremos:

$1000 + 80 + 80 = 1160$ euros.

En el segundo caso: (Interés compuesto)

Intereses del primer año: $0.08 \cdot 1000 = 80$ euros.

Intereses del segundo año: $0.08 \cdot (1000 + 80) = 86.4$ euros.

Al cabo de dos años tendremos:
$1000 + 80 + 86.4 = 1166.4$ euros

Capitalización simple

En **capitalización simple** se considera como capital productor de intereses únicamente el capital inicial.

C_0: capital inicial
i: tanto de interés anual (expresado en tanto por uno).

El montante (capital final) será:

- Al cabo de 1 año :
  $C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1+i)$.
- Al cabo de 2 años:
  $C_2 = C_1 + C_0 i = C_0(1+i) + C_0 i = C_0(1+2i)$.
- Al cabo de 3 años:
  $C_3 = C_2 + C_0 i = C_0(1+2i) + C_0 i = C_0(1+3i)$.
- Y así sucesivamente, al cabo de n años:
  $\boxed{C_n = C_0(1+ni)}$ $(= C_0 + C_o ni)$

En **capitalización compuesta** los intereses también se capitalizan, es decir, se acumulan al capital logrado al principio de cada período (año, por ejemplo) para producir conjuntamente con éste nuevos intereses.

C_0: capital inicial
i: tanto de interés anual (expresado en tanto por uno).

El montante (capital final) será:

- Al cabo de 1 año : $C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1+i)$
- Al cabo de 2 años: $C_2 = C_1 + C_1 i = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$
- Al cabo de 3 años: $C_3 = C_2 + C_2 i = C_2(1+i) = C_0(1+i)^3$
- Y así sucesivamente, al cabo de n años: $\boxed{C_n = C_0(1+i)^n}$

Las fórmulas anteriores de interés simple o compuesto siguen siendo válidas aunque el período de capitalización no sea el año (puede ser, por ejemplo, el mes, el trimestre, etc.) siempre y cuando el tanto de interés i esté referido a dicho período de capitalización.

Las fórmulas anteriores de interés simple o compuesto siguen siendo válidas aunque el período de capitalización no sea el año (puede ser, por ejemplo, el mes, el trimestre, etc.) siempre y cuando el tanto de interés i esté referido a dicho período de capitalización.

Por ejemplo, para calcular el montante de un capital en un plazo de dos meses, puede:
-) usar la fórmula referida a meses
o, alternativamente,
-) usar la fórmula referida a años, (Ahora $n = 2/12$ es fraccionario)

Las fórmulas anteriores de interés simple o compuesto siguen siendo válidas aunque el período de capitalización no sea el año (puede ser, por ejemplo, el mes, el trimestre, etc.) siempre y cuando el tanto de interés i esté referido a dicho período de capitalización.

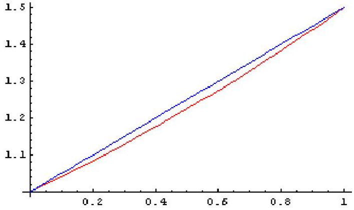
Por ejemplo, para calcular el montante de un capital en un plazo de dos meses, puede:
-) usar la fórmula referida a meses
o, alternativamente,
-) usar la fórmula referida a años, (Ahora $n = 2/12$ es fraccionario)

El interés simple se emplea en **operaciones a corto plazo** (hasta un año).

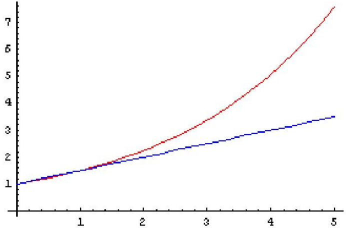
El interés compuesto se emplea en **operaciones a medio y largo plazo** (más de un año).

Interés simple en azul. (Representación de $(1+ni)$).
Interés compuesto en rojo. (Representación de $(1+i)^n$).
$i = 50\,\%$ (grande, para que se vea la diferencia).

Corto Plazo



Largo Plazo



Ejemplo

Determinar el montante de un capital de 2500 *euros invertido al* 2 % *trimestral de interés simple durante* 5 *trimestres.*

Usamos la fórmula $C_n = C_0(1 + ni)$, siendo
$C_0 = 2500$,
$i = 0.02$ trimestral y
$n = 5$ trimestres.
¿C_n?

$$C_n = 2500(1 + 5 \cdot 0.02) = 2750 \quad \text{euros}$$

Ejemplo

Determinar el montante de un capital de 30000 *euros invertido al 3 % semestral de interés compuesto durante 4 años.*

Usamos la fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$, con
$C_0 = 30000$,
$i = 0.03$ semestral y
$n = 4$ años $= 8$ semestres.
¿C_n?

$$C_n = 30000(1.03)^8 = 38003.1 \quad \text{euros}$$

Ejemplo

Determinar el montante de un capital de 30000 *euros invertido al 3 % semestral de interés compuesto durante 4 años.*

Usamos la fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$, con
$C_0 = 30000$,
$i = 0.03$ semestral y
$n = 4$ años $= 8$ semestres.
¿C_n?

$$C_n = 30000(1.03)^8 = 38003.1 \quad \text{euros}$$

¿A cuánto ascienden los intereses recibidos?

Ejemplo

Determinar el montante de un capital de 30000 *euros invertido al* 3 % *semestral de interés compuesto durante 4 años.*

Usamos la fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$, con
$C_0 = 30000$,
$i = 0.03$ semestral y
$n = 4$ años $= 8$ semestres.
¿C_n?

$$C_n = 30000(1.03)^8 = 38003.1 \quad \text{euros}$$

¿A cuánto ascienden los intereses recibidos?
Son la diferencia: $38003.1 - 30000 = 8003.1$ euros.

Ejemplo

¿Qué cantidad debemos ingresar hoy en el Banco para que dentro de 4 años tengamos un montante de 1000 euros si se capitaliza al 5 % de interés compuesto anual?

En la fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$ tenemos:
$C_n = 1000$,
$i = 0.05$ anual y
$n = 4$ años.
¿C_0?

$$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \Rightarrow \boxed{C_0 = C_n(1+i)^{-n}}.$$

Es decir, $C_0 = 1000(1.05)^{-4}$, o sea, $\boxed{C_0 = 822.70}$ euros.

Ejemplo

Determinar el tanto de interés compuesto a que debe invertirse un capital de 1000 *euros para que en* 15 *años se obtenga un montante de 1795 euros.*

Usamos la misma fórmula, $C_n = C_0(1+i)^n$, siendo:
$C_0 = 1000$,
$n = 15$ años y
$C_n = 1795$.
¿i?
Se tiene:

$$1795 = 1000(1+i)^{15} \quad \Longrightarrow$$

Ejemplo

Determinar el tanto de interés compuesto a que debe invertirse un capital de 1000 *euros para que en* 15 *años se obtenga un montante de 1795 euros.*

Usamos la misma fórmula, $C_n = C_0(1+i)^n$, siendo:
$C_0 = 1000$,
$n = 15$ años y
$C_n = 1795$.
¿i?
Se tiene:

$$1795 = 1000(1+i)^{15} \quad \Longrightarrow \quad (1+i)^{15} = 1.795 \quad \Longrightarrow$$

Ejemplo

Determinar el tanto de interés compuesto a que debe invertirse un capital de 1000 *euros para que en* 15 *años se obtenga un montante de 1795 euros.*

Usamos la misma fórmula, $C_n = C_0(1+i)^n$, siendo:
$C_0 = 1000$,
$n = 15$ años y
$C_n = 1795$.
¿i?
Se tiene:

$$1795 = 1000(1+i)^{15} \quad \Longrightarrow \quad (1+i)^{15} = 1.795 \quad \Longrightarrow$$

$$1 + i = (1.795)^{1/15} \quad \Longrightarrow \quad i = (1.795)^{1/15} - 1 = 0.03977$$

Por tanto, la tasa de interés es de un 3.98 % anual.

Ejemplo

En cuánto tiempo se duplica una cantidad de dinero si está colocada al 5 % de interés compuesto anual?

Usamos la fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$. Tenemos:
$i = 0.05$ y
$C_n = 2C_0$.

Entonces

$$2C_0 = C_0(1+0.05)^n \quad \Longrightarrow$$

Ejemplo

En cuánto tiempo se duplica una cantidad de dinero si está colocada al 5 % de interés compuesto anual?

Usamos la fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$. Tenemos:
$i = 0.05$ y
$C_n = 2C_0$.

Entonces

$$2C_0 = C_0(1+0.05)^n \quad \Longrightarrow \quad 2 = (1.05)^n$$

Ejemplo

En cuánto tiempo se duplica una cantidad de dinero si está colocada al 5 % de interés compuesto anual?

Usamos la fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$. Tenemos:
$i = 0.05$ y
$C_n = 2C_0$.

Entonces

$$2C_0 = C_0(1+0.05)^n \quad \Longrightarrow \quad 2 = (1.05)^n$$

$$\log(2) = n\log(1.05) \Longrightarrow n = \frac{\log(2)}{\log(1.05)} = 14.21$$

Es decir, el capital tarda en duplicarse poco más de 14 años.

Un ejemplo con Bonos del Estado

Ejemplo

Pepe compra Bonos del Estado. Le cuestan 8 000 *euros. A cambio, cobrará* 12 000 *cuando pasen* 10 *años. ¿A qué tanto de interés compuesto anual están remunerados tales bonos?*

Un ejemplo con Bonos del Estado

Ejemplo

Pepe compra Bonos del Estado. Le cuestan 8 000 *euros. A cambio, cobrará* 12 000 *cuando pasen* 10 *años. ¿A qué tanto de interés compuesto anual están remunerados tales bonos?*

$$8\,000(1+i)^{10} = 12\,000 \quad \Longrightarrow \quad i = \left(\frac{12\,000}{8\,000}\right)^{1/10} - 1 = 4.14\,\%$$

Ejemplo

Transcurridos tres años desde que los compró, Pepe vende sus bonos a Manolo por 8 800 *euros. ¿Qué tanto de interés ha cobrado realmente Pepe? ¿Qué tanto de interés cobrará Manolo si los mantiene hasta su vencimiento, siete años después?*

Un ejemplo con Bonos del Estado

Ejemplo

Pepe compra Bonos del Estado. Le cuestan 8 000 *euros. A cambio, cobrará* 12 000 *cuando pasen* 10 *años. ¿A qué tanto de interés compuesto anual están remunerados tales bonos?*

$$8\,000(1+i)^{10} = 12\,000 \quad \Longrightarrow \quad i = \left(\frac{12\,000}{8\,000}\right)^{1/10} - 1 = 4.14\,\%$$

Ejemplo

Transcurridos tres años desde que los compró, Pepe vende sus bonos a Manolo por 8 800 *euros. ¿Qué tanto de interés ha cobrado realmente Pepe? ¿Qué tanto de interés cobrará Manolo si los mantiene hasta su vencimiento, siete años después?*

Pepe:

Un ejemplo con Bonos del Estado

Ejemplo

Pepe compra Bonos del Estado. Le cuestan 8 000 *euros. A cambio, cobrará* 12 000 *cuando pasen* 10 *años. ¿A qué tanto de interés compuesto anual están remunerados tales bonos?*

$$8\,000(1+i)^{10} = 12\,000 \quad \Longrightarrow \quad i = \left(\frac{12\,000}{8\,000}\right)^{1/10} - 1 = 4.14\,\%$$

Ejemplo

Transcurridos tres años desde que los compró, Pepe vende sus bonos a Manolo por 8 800 *euros. ¿Qué tanto de interés ha cobrado realmente Pepe? ¿Qué tanto de interés cobrará Manolo si los mantiene hasta su vencimiento, siete años después?*

Pepe: $8\,000(1+i)^3 =$

Un ejemplo con Bonos del Estado

Ejemplo

Pepe compra Bonos del Estado. Le cuestan 8 000 *euros. A cambio, cobrará* 12 000 *cuando pasen* 10 *años. ¿A qué tanto de interés compuesto anual están remunerados tales bonos?*

$$8\,000(1+i)^{10} = 12\,000 \quad \Longrightarrow \quad i = \left(\frac{12\,000}{8\,000}\right)^{1/10} - 1 = 4.14\,\%$$

Ejemplo

Transcurridos tres años desde que los compró, Pepe vende sus bonos a Manolo por 8 800 *euros. ¿Qué tanto de interés ha cobrado realmente Pepe? ¿Qué tanto de interés cobrará Manolo si los mantiene hasta su vencimiento, siete años después?*

Pepe: $8\,000(1+i)^3 = 8\,800 \Longrightarrow i = \left(\frac{8\,800}{8\,000}\right)^{1/3} - 1 = 3.23\,\%$

Un ejemplo con Bonos del Estado

Ejemplo

Pepe compra Bonos del Estado. Le cuestan 8 000 *euros. A cambio, cobrará* 12 000 *cuando pasen* 10 *años. ¿A qué tanto de interés compuesto anual están remunerados tales bonos?*

$$8\,000(1+i)^{10} \;=\; 12\,000 \quad\Longrightarrow\quad i \;=\; \left(\frac{12\,000}{8\,000}\right)^{1/10} - 1 \;=\; 4.14\,\%$$

Ejemplo

Transcurridos tres años desde que los compró, Pepe vende sus bonos a Manolo por 8 800 *euros. ¿Qué tanto de interés ha cobrado realmente Pepe? ¿Qué tanto de interés cobrará Manolo si los mantiene hasta su vencimiento, siete años después?*

Pepe: $8\,000(1+i)^3 = 8\,800 \Longrightarrow i = \left(\frac{8\,800}{8\,000}\right)^{1/3} - 1 = 3.23\,\%$

Man.: $8\,800(1+i)^7 =$

Un ejemplo con Bonos del Estado

Ejemplo

Pepe compra Bonos del Estado. Le cuestan 8 000 *euros. A cambio, cobrará* 12 000 *cuando pasen* 10 *años. ¿A qué tanto de interés compuesto anual están remunerados tales bonos?*

$$8\,000(1+i)^{10} = 12\,000 \quad \Longrightarrow \quad i = \left(\frac{12\,000}{8\,000}\right)^{1/10} - 1 = 4.14\,\%$$

Ejemplo

Transcurridos tres años desde que los compró, Pepe vende sus bonos a Manolo por 8 800 *euros. ¿Qué tanto de interés ha cobrado realmente Pepe? ¿Qué tanto de interés cobrará Manolo si los mantiene hasta su vencimiento, siete años después?*

$$\text{Pepe:}\quad 8\,000(1+i)^3 = 8\,800 \Longrightarrow i = \left(\frac{8\,800}{8\,000}\right)^{1/3} - 1 = 3.23\,\%$$

$$\text{Man.:}\quad 8\,800(1+i)^7 = 12\,000 \Longrightarrow i = \left(\frac{12\,000}{8\,800}\right)^{1/7} - 1 = 4.53\,\%$$

Cuando Manolo compra los bonos, lo hace a interés del 4.53 %.

Cuando Manolo compra los bonos, lo hace a interés del 4.53 %.

Supongamos que, en ese mismo momento, el tanto de interés para los bonos alemanes es del 1.5 %.

La diferencia es $4.53\,\% - 1.5\,\% = 3.03\,\%$.

La prima de riesgo

Cuando Manolo compra los bonos, lo hace a interés del 4.53 %.

Supongamos que, en ese mismo momento, el tanto de interés para los bonos alemanes es del 1.5 %.

La diferencia es $4.53\,\% - 1.5\,\% = 3.03\,\%$.

Entonces la *prima de riesgo* del bono español con respecto al alemán es de 303 puntos básicos.

Tantos equivalentes en capitalización compuesta.

En capitalización simple hay proporcionalidad entre los tantos de interés y los períodos de tiempo a que se refieren, es decir, un 8 % anual es equivalente a un 4 % semestral, etc.

Sin embargo, en capitalización compuesta no hay proporcionalidad entre los tantos de interés referidos a distintos períodos de tiempo. El motivo es la capitalización del interés al final del período.

Ejemplo

Supongamos por ejemplo que colocamos en el banco 100 euros al 3 % semestral.
Al final del primer semestre los intereses producidos serán de 3 euros y el capital será de 103 euros.
En el segundo semestre, este capital producirá unos intereses de $0.03 \cdot 103 = 3.09$ euros.
El total de intereses al final del año sería 6.09 euros, mientras que un 6 % anual produciría solamente 6 euros de intereses.

Tantos equivalentes en capitalización compuesta.

Dado un tanto de interés anual i, se llama "tanto equivalente" para k-ésimos de año, y se denota como i_k, a un tanto tal que se obtenga el mismo montante capitalizando por años al tanto i que capitalizando por k-ésimos de año al tanto i_k.

Por ejemplo, un trimestre es un cuarto de año, o sea, es un 4-ésimo de año.

Un semestre es medio año, o sea un 2-ésimo de año.

Tantos equivalentes en capitalización compuesta.

Ejemplo

Hallar el tanto por trimestres, i_4, equivalente a un tanto anual del 12 %.

Supongamos un capital inicial C_0.
Si lo capitalizamos por años al tanto $i = 0.12$, al cabo de n años tendremos un montante de: $C_0(1.12)^n$.
Si lo capitalizamos por trimestres al tanto i_4, al cabo de n años, que son $4n$ trimestres, tendremos un montante de: $C_0(1+i_4)^{4n}$.

Por tanto, $$C_0(1.12)^n = C_0(1+i_4)^{4n} \quad \Longrightarrow$$

$$(1.12)^n = (1+i_4)^{4n} \quad \Longrightarrow$$

Tantos equivalentes en capitalización compuesta.

Ejemplo

Hallar el tanto por trimestres, i_4, equivalente a un tanto anual del 12 %.

Supongamos un capital inicial C_0.
Si lo capitalizamos por años al tanto $i = 0.12$, al cabo de n años tendremos un montante de: $C_0(1.12)^n$.
Si lo capitalizamos por trimestres al tanto i_4, al cabo de n años, que son $4n$ trimestres, tendremos un montante de: $C_0(1 + i_4)^{4n}$.

$$\text{Por tanto,} \qquad C_0(1.12)^n = C_0(1 + i_4)^{4n} \quad \Longrightarrow$$

$$(1.12)^n = (1 + i_4)^{4n} \quad \Longrightarrow \quad 1.12 = (1 + i_4)^4 \quad \Longrightarrow$$

$$1 + i_4 = (1.12)^{1/4} \quad \Longrightarrow \quad i_4 = (1.12)^{1/4} - 1 = 0.0287373447$$

Tantos equivalentes en capitalización compuesta.

Ejemplo

Hallar el tanto por trimestres, i_4, equivalente a un tanto anual del 12 %.

Supongamos un capital inicial C_0.
Si lo capitalizamos por años al tanto $i = 0.12$, al cabo de n años tendremos un montante de: $C_0(1.12)^n$.
Si lo capitalizamos por trimestres al tanto i_4, al cabo de n años, que son $4n$ trimestres, tendremos un montante de: $C_0(1+i_4)^{4n}$.

$$\text{Por tanto,} \qquad C_0(1.12)^n = C_0(1+i_4)^{4n} \quad \Longrightarrow$$

$$(1.12)^n = (1+i_4)^{4n} \quad \Longrightarrow \quad 1.12 = (1+i_4)^4 \quad \Longrightarrow$$

$$1+i_4 = (1.12)^{1/4} \quad \Longrightarrow \quad i_4 = (1.12)^{1/4} - 1 = 0.0287373447$$

Es decir, un 12 % anual es equivalente a un 2.87 % trimestral.

Tantos equivalentes en capitalización compuesta.

Vamos a deducir la relación existente entre el tanto por años, i y el tanto por k-ésimos de año, i_k.

Para n años, debe cumplirse que:

$$C_0(1+i)^n = C_0(1+i_k)^{nk}$$

Simplificando C_0:

$$(1+i)^n = (1+i_k)^{nk}$$

Tantos equivalentes en capitalización compuesta.

Vamos a deducir la relación existente entre el tanto por años, i y el tanto por k-ésimos de año, i_k.

Para n años, debe cumplirse que:

$$C_0(1+i)^n = C_0(1+i_k)^{nk}$$

Simplificando C_0:

$$(1+i)^n = (1+i_k)^{nk}$$

Elevando a $1/n$:

$$\boxed{1+i = (1+i_k)^k}$$

Ésta es la relación existente entre los tantos equivalentes.

Tantos equivalentes en capitalización compuesta.

Vamos a deducir la relación existente entre el tanto por años, i y el tanto por k-ésimos de año, i_k.

Para n años, debe cumplirse que:

$$C_0(1+i)^n = C_0(1+i_k)^{nk}$$

Simplificando C_0:

$$(1+i)^n = (1+i_k)^{nk}$$

Elevando a $1/n$:

$$\boxed{1+i = (1+i_k)^k}$$

Ésta es la relación existente entre los tantos equivalentes.
De aquí se puede:

- Hallar i si se conoce i_k: $i = (1+i_k)^k - 1$.
- Hallar i_k si conocemos i:
  $(1+i)^{1/k} = 1 + i_k$, de donde $i_k = (1+i)^{1/k} - 1$.

Ejemplos

1. Obtener el tanto mensual equivalente al 18 % de interés anual compuesto.

   Conocemos $i = 0.18$. Queremos hallar i_{12}.

Ejemplos

1. Obtener el tanto mensual equivalente al 18 % de interés anual compuesto.

   Conocemos $i = 0.18$. Queremos hallar i_{12}.

   $$1+i = (1+i_{12})^{12} \quad \Longrightarrow \quad i_{12} = (1+i)^{1/12} - 1 = (1.18)^{1/12} - 1$$

   Es decir, el tanto mensual es $i_{12} = 0.01388843$, o sea, un 1.388843 %

Ejemplos

1. Obtener el tanto mensual equivalente al 18 % de interés anual compuesto.

   Conocemos $i = 0.18$. Queremos hallar i_{12}.

   $$1+i = (1+i_{12})^{12} \quad \Longrightarrow \quad i_{12} = (1+i)^{1/12} - 1 = (1.18)^{1/12} - 1$$

   Es decir, el tanto mensual es $i_{12} = 0.01388843$, o sea, un 1.388843 %

2. Obtener el tanto anual de interés compuesto equivalente al 2 % semestral.

Ejemplos

1. Obtener el tanto mensual equivalente al 18 % de interés anual compuesto.

   Conocemos $i = 0.18$. Queremos hallar i_{12}.

   $$1+i = (1+i_{12})^{12} \quad \Longrightarrow \quad i_{12} = (1+i)^{1/12}-1 = (1.18)^{1/12}-1$$

   Es decir, el tanto mensual es $i_{12} = 0.01388843$, o sea, un 1.388843 %

2. Obtener el tanto anual de interés compuesto equivalente al 2 % semestral.

   Tenemos que $i_2 = 0.02$ y queremos hallar i.

   $$1+i = (1+i_2)^2 \text{ de donde: } i = (1+i_2)^2 - 1 = (1.02)^2 - 1$$

   Es decir, el tanto anual es $i = 0.0404$, o sea el 4.04 %

Tanto nominal

Es un tanto teórico que se obtiene multiplicando la frecuencia de capitalización, k, por el tanto i_k.

El tanto nominal se suele representar por j_k y, según hemos dicho, se define como:

$$\boxed{j_k = k \cdot i_k} \qquad \text{de donde} \qquad \boxed{i_k = \frac{j_k}{k}}$$

Por ejemplo, si hablamos de un 6 % nominal (anual) capitalizable por semestres, ($j_2 = 0.06$), en realidad lo que estamos diciendo es que capitalizamos al 3 % semestral ($i_2 = \frac{j_2}{2} = \frac{0.06}{2} = 0.03$).

Esto equivale a un tanto efectivo anual del 6.09 %.

Tanto nominal.

Ejemplo

Si nos hablan de un tipo de interés nominal (anual) del $8\,\%$*, capitalizable trimestralmente, ¿qué significa?*

Tanto nominal.

Ejemplo

Si nos hablan de un tipo de interés nominal (anual) del $8\,\%$*, capitalizable trimestralmente, ¿qué significa?*

Lo que realmente significa es que el interés se abona trimestralmente, a razón de

$$\frac{8\,\%}{4} = 2\,\% \text{ trimestral}$$

O sea, el dato es que $i_4 = \frac{j_4}{4} = \frac{8\,\%}{4} = 2\,\%$.

Tanto nominal.

Ejemplo

Si nos hablan de un tipo de interés nominal (anual) del $8\,\%$, *capitalizable trimestralmente, ¿qué significa?*

Lo que realmente significa es que el interés se abona trimestralmente, a razón de

$$\frac{8\,\%}{4} = 2\,\%\ \text{trimestral}$$

O sea, el dato es que $i_4 = \dfrac{j_4}{4} = \dfrac{8\,\%}{4} = 2\,\%$.

¿Cuál sería el interés efectivo anual?
El tipo de interés equivalente anual, i, se obtiene:

$$1 + i = (1 + i_4)^4 \quad \Rightarrow \quad i = (1 + 0.02)^4 - 1 = 0.0824322$$

Es decir, $i = 8.24\,\%$.

Debe quedar claro que el dato del interés nominal (T.I.N.) tiene que ir acompañado del dato de cuál es el período de capitalización (mensual, trimestral, ...)

Si no hay características comerciales (gastos adicionales que surgen en una operación financiera, fundamentalmente comisiones), el interés efectivo anual de interés compuesto es exactamente lo mismo que la llamada T.A.E. (tasa anual equivalente).

Pero si hay comisiones, hay que incluirlas en la T.A.E.

El Banco de España obliga a especificar la T.A.E. en las operaciones financieras desde el año 1990, en que publica la norma 8/1990 sobre "Transparencia de las operaciones y protección de la clientela".

Ejercicio

Determinar el montante de un capital de 10000 *euros invertido al* $8\,\%$ *nominal capitalizable por trimestres, siendo tres años y medio el tiempo que ha estado invertido.*

Ejercicio

Determinar el montante de un capital de 10000 euros invertido al 8 % nominal capitalizable por trimestres, siendo tres años y medio el tiempo que ha estado invertido.

El dato es el tanto nominal $j_4 = 0.08$, lo que significa que el tanto trimestral es $i_4 = 0.08/4 = 0.02$.

Ejercicio

Determinar el montante de un capital de 10000 *euros invertido al* 8 % *nominal capitalizable por trimestres, siendo tres años y medio el tiempo que ha estado invertido.*

El dato es el tanto nominal $j_4 = 0.08$, lo que significa que el tanto trimestral es $i_4 = 0.08/4 = 0.02$.

Usamos la fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$, con
$C_0 = 10000$
$i = 0.02$ (trimestral)
$n = 14$ (trimestres)

Entonces

$$C_n = 10000(1+0.02)^{14} = 10000\,(1.31948) = 13194.8$$

Alternativamente, también se puede resolver el problema por años.

Ejercicio

(Alternativa: Resolvemos el mismo ejercicio por años.)
Lo primero es calcular el tanto de interés anual equivalente a un 2 % trimestral.

$$1 + i = (1 + i_4)^4 \quad \Longrightarrow \quad i = (1.02)^4 - 1 = 0.0824322$$

Entonces, y teniendo en cuenta que transcurren tres años y medio, el capital final será:

$$C_n = 10000(1 + 0.0824322)^{3.5} = 10000\,(1.31948) = 13194.8$$

Obtenemos el mismo resultado que antes, como era lógico.

De paso, hemos comprobado que las fórmulas siguen valiendo para un número de períodos fraccionario.

Ejercicios resueltos. Un ejemplo con gastos comerciales.

Ejercicio

Pepe recibe un préstamo de 30000 *euros para devolver en un solo pago con intereses dentro de* 8 *años a un tipo del* 10 %.
Existen los siguientes gastos comerciales:

- *Comisión del* 1.5 %*, a pagar por el prestatario (Pepe) en el momento inicial.*
- *Gastos de Notaría:* 2 % *del préstamo, a pagar también por Pepe al inicio de la operación.*
- *Impuesto de Hacienda:* 18 % *de la plusvalía, a pagar por el prestamista al final de la operación.*

Se pide calcular:

- *La T.A.E. (incluye la comisión).*
- *La tasa interna de interés para el prestatario (incluye la comisión y los gastos de notaría).*
- *La tasa interna de interés para el prestamista (incluye el impuesto).*

Resolviendo el ejercicio

Cálculo de la T.A.E.

Pepe recibe en el momento inicial: $30000 - 0.015(30000) = 29550$.
Al cabo de 8 años devolverá: $30000(1 + 0.10)^8 = 64307.7$.

Entonces la T.A.E. es el tanto i de modo que:
$64307.7 = 29550(1 + i)^8$.

Resolviendo esta ecuación se llega a que la T.A.E. es del 10.21 %.

Cálculo de la T.A.E.

Pepe recibe en el momento inicial: $30000 - 0.015(30000) = 29550$.
Al cabo de 8 años devolverá: $30000(1 + 0.10)^8 = 64307.7$.

Entonces la T.A.E. es el tanto i de modo que:
$64307.7 = 29550(1 + i)^8$.

Resolviendo esta ecuación se llega a que la T.A.E. es del 10.21 %.

Resolviendo la ecuación:

$$29550(1 + i)^8 = 64307.7 \quad \longrightarrow$$

$$1 + i = \left(\frac{64307.7}{29550}\right)^{1/8} = 1.10208 \quad \longrightarrow$$

$$i = 0.10208$$

Cálculo de la tasa interna de interés para el prestatario.

Teniendo en cuenta no sólo la comisión, sino también los gastos de notaría,

Pepe recibe en el momento inicial:
$30000 - 0.015(30000) - 0.02(30000) = 28950.$

Al cabo de 8 años devolverá: $30000(1 + 0.10)^8 = 64307.7.$

La tasa interna para el prestatario es el tanto i_p de modo que:
$64307.7 = 28950(1 + i_p)^8.$

Resolviendo esta ecuación, sale que $i_p = 10.49\,\%$.

Resolviendo el ejercicio

Cálculo de la tasa interna de interés para el prestamista.

Recibe al cabo de 8 años: $30000(1+0.10)^8 = 64307.7$.
Debe pagar a Hacienda: $0.18(64307.7-30000) = 6175.4$.
Recibe “netos”: $64307.7 - 6175.4 = 58132.3$.

Entregó en el momento inicial: $30000 - 0.015(30000) = 29550$.

Por tanto, su tasa interna de interés será el tanto i_a de modo que: $58132.3 = 29550(1+i_a)^8$.

Calculando i_a se obtiene que es: $i_a = 8.83\,\%$.

Ejercicio

Hace 5 años Juan ingresó 1000 euros en una cuenta que ofrecía interés variable en capitalización compuesta. Hallar:

1. El saldo actual de esta cuenta, sabiendo que el interés de los dos primeros años fué el 10 %, el interés de los años 3 y 4 fué el 11 % y el interés del quinto año ha sido del 12 %.
2. La T.A.E. de la operación.

Un ejercicio con interés variable

Ejercicio

Hace 5 años Juan ingresó 1000 euros en una cuenta que ofrecía interés variable en capitalización compuesta. Hallar:

1. El saldo actual de esta cuenta, sabiendo que el interés de los dos primeros años fué el 10 %, el interés de los años 3 y 4 fué el 11 % y el interés del quinto año ha sido del 12 %.
2. La T.A.E. de la operación.

Solución:

Un ejercicio con interés variable

Ejercicio

Hace 5 años Juan ingresó 1000 euros en una cuenta que ofrecía interés variable en capitalización compuesta. Hallar:

1. El saldo actual de esta cuenta, sabiendo que el interés de los dos primeros años fué el 10 %, el interés de los años 3 y 4 fué el 11 % y el interés del quinto año ha sido del 12 %.
2. La T.A.E. de la operación.

Solución:

(a) 1000

Ejercicio

Hace 5 años Juan ingresó 1000 euros en una cuenta que ofrecía interés variable en capitalización compuesta. Hallar:

1. El saldo actual de esta cuenta, sabiendo que el interés de los dos primeros años fué el 10 %, el interés de los años 3 y 4 fué el 11 % y el interés del quinto año ha sido del 12 %.
2. La T.A.E. de la operación.

Solución:

(a) $1000(1 + 0.10)^2$

Ejercicio

Hace 5 años Juan ingresó 1000 euros en una cuenta que ofrecía interés variable en capitalización compuesta. Hallar:

1. El saldo actual de esta cuenta, sabiendo que el interés de los dos primeros años fué el 10 %, el interés de los años 3 y 4 fué el 11 % y el interés del quinto año ha sido del 12 %.
2. La T.A.E. de la operación.

Solución:

(a) $1000(1 + 0.10)^2(1 + 0.11)^2$

Un ejercicio con interés variable

Ejercicio

Hace 5 años Juan ingresó 1000 euros en una cuenta que ofrecía interés variable en capitalización compuesta. Hallar:

1. El saldo actual de esta cuenta, sabiendo que el interés de los dos primeros años fué el 10 %, el interés de los años 3 y 4 fué el 11 % y el interés del quinto año ha sido del 12 %.
2. La T.A.E. de la operación.

Solución:

(a) $1000(1+0.10)^2(1+0.11)^2(1+0.12)$

Un ejercicio con interés variable

Ejercicio

Hace 5 años Juan ingresó 1000 euros en una cuenta que ofrecía interés variable en capitalización compuesta. Hallar:

1. El saldo actual de esta cuenta, sabiendo que el interés de los dos primeros años fué el 10 %, el interés de los años 3 y 4 fué el 11 % y el interés del quinto año ha sido del 12 %.
2. La T.A.E. de la operación.

Solución:

(a) $1000(1+0.10)^2(1+0.11)^2(1+0.12) \; = \; 1669.74$ euros.

Ejercicio

Hace 5 años Juan ingresó 1000 euros en una cuenta que ofrecía interés variable en capitalización compuesta. Hallar:

1. El saldo actual de esta cuenta, sabiendo que el interés de los dos primeros años fué el 10 %, el interés de los años 3 y 4 fué el 11 % y el interés del quinto año ha sido del 12 %.
2. La T.A.E. de la operación.

Solución:

(a) $1000(1+0.10)^2(1+0.11)^2(1+0.12) \;=\; 1669.74$ euros.

(b) $1000(1+i)^5 \;=\; 1669.74 \quad \longrightarrow$

Ejercicio

Hace 5 años Juan ingresó 1000 euros en una cuenta que ofrecía interés variable en capitalización compuesta. Hallar:

1. El saldo actual de esta cuenta, sabiendo que el interés de los dos primeros años fué el 10 %, el interés de los años 3 y 4 fué el 11 % y el interés del quinto año ha sido del 12 %.
2. La T.A.E. de la operación.

Solución:

(a) $1000(1+0.10)^2(1+0.11)^2(1+0.12) \;=\; 1669.74$ euros.

(b) $1000(1+i)^5 \;=\; 1669.74 \quad \longrightarrow$

$$i \;=\; \left(\frac{1669.74}{1000}\right)^{1/5} - 1 \;=\; 0.1079745 \quad \longrightarrow$$

Un ejercicio con interés variable

Ejercicio

Hace 5 años Juan ingresó 1000 euros en una cuenta que ofrecía interés variable en capitalización compuesta. Hallar:

1. El saldo actual de esta cuenta, sabiendo que el interés de los dos primeros años fué el 10 %, el interés de los años 3 y 4 fué el 11 % y el interés del quinto año ha sido del 12 %.
2. La T.A.E. de la operación.

Solución:

(a) $1000(1+0.10)^2(1+0.11)^2(1+0.12) \;=\; 1669.74$ euros.

(b) $1000(1+i)^5 \;=\; 1669.74 \quad \longrightarrow$

$$i \;=\; \left(\frac{1669.74}{1000}\right)^{1/5} - 1 \;=\; 0.1079745 \quad \longrightarrow$$

$i = 10.797\,\%$

Descuento

Capitalización: Sustitución de una capital inicial, C_0, por otro capital en el futuro, C_n.
Descuento: Sustitución de un capital futuro, C_n, por un capital actual, C_0.

Ejemplo

María tiene tiene un pagaré que le abonará 1000 euros dentro de un año.
Como necesita el dinero con urgencia, va a un Banco a ver cuánto dinero le puede dar ahora por su pagaré.

El Banco le dice que aplica una tasa de descuento del 20 % anual.

Eso significa que le quita el 20 % de los 1000 euros, es decir, 200 euros y, en consecuencia, le abona $1000 - 200 = 800$ euros por su pagaré.

O sea, el Banco paga 800 euros y recibe a cambio 1000 dentro de un año.

Pregunta:

¿Cuál es el tipo de interés que cobra el Banco en esta operación?

Pista: no es el 20 %.

Descuento

O sea, el Banco paga 800 euros y recibe a cambio 1000 dentro de un año.

Pregunta:

¿Cuál es el tipo de interés que cobra el Banco en esta operación?

Pista: no es el 20 %.

Solución: $C_0 = 800.$ $C_1 = 1000.$

$$1000 = 800(1+i) \quad \Rightarrow \quad 1+i = 1000/800 = 1.25 \quad \Rightarrow \quad i = 0.25$$

Es decir, el descuento del 20 % realmente representa un interés del 25 %.

Un ejemplo similar

Ejemplo

En cierta tienda me hacen un descuento de un 20 % si compro hoy cierta lavadora.

Si la compro mañana, la pagaré a su precio normal, que es 1000 euros.

¿En qué porcentaje sube el precio de la lavadora si la compro mañana en vez de hoy?

Un ejemplo similar

Ejemplo

En cierta tienda me hacen un descuento de un 20 % si compro hoy cierta lavadora.

Si la compro mañana, la pagaré a su precio normal, que es 1000 euros.

¿En qué porcentaje sube el precio de la lavadora si la compro mañana en vez de hoy?

En un 25 %.

(La rebaja es de 200 euros.
Representa un 20 % de 1000, pero un 25 % de 800.)

Un mismo tanto nominal anual de interés, j, dependiendo de que se capitalice por semestres, por trimestres, por meses, por días, representa distintos tantos efectivos.

Por ejemplo, un 12 % nominal, si se capitaliza por semestres es un 6 % semestral, pero si se capitaliza por meses es un 1 % mensual, que representa un mayor interés efectivo.

(Un 6 % semestral equivale a un tipo anual efectivo de
$i = (1 + 0.06)^2 - 1 = 12.36\,\%$)
(Un 1 % mensual equivale a un tipo anual efectivo de
$i = (1 + 0.01)^{12} - 1 = 12.68\,\%$)

¿Y si se capitaliza ya no por meses, sino por días, horas, minutos, segundos, etc. ?
¿Cuál es el límite de los correspondientes tantos efectivos?

Una curiosidad matemática: el interés continuo

Supongamos que δ es un tanto nominal y que el año se divide en k períodos. Entonces el tanto efectivo anual, i, se calcula como

$$1+i=\left(1+\frac{\delta}{k}\right)^k \quad \Longrightarrow \quad i=\left(1+\frac{\delta}{k}\right)^k-1$$

Si hacemos que $k \rightarrow \infty$, tenemos

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{k}\right)^k - 1 \;=\; \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k/\delta}\right)^{\frac{k}{\delta}\,\delta} - 1 \;=\; e^{\delta} \;-\; 1$$

Por tanto, en el límite, el tanto efectivo anual es: $i=e^{\delta}-1$.

En otras palabras, $1+i=e^{\delta}$.

Por tanto, el capital al cabo de n años es:
$C_n \;=\; C_0(1+i)^n \;=\; C_0 e^{n\delta}$

δ se dice que es el tanto anual de *capitalización continua*.

Equivale a un tanto anual i de interés compuesto.

Una curiosidad matemática: el interés continuo

Capitalización continua

$$C_n = C_0\, e^{n\delta}$$

Ésta es la fórmula para la capitalización continua, siendo δ la tasa de interés continuo y n el número de años.

Una curiosidad matemática: el interés continuo

Ejemplo

¿En cuánto se convierten 1000 euros colocados durante tres años a una tasa de interés del

1. 12 % anual efectivo.
2. 12 % nominal capitalizable mensualmente.
3. 12 % nominal capitalizable diariamente.
4. 12 % continuo.

Una curiosidad matemática: el interés continuo

Ejemplo

¿En cuánto se convierten 1000 euros colocados durante tres años a una tasa de interés del

1. 12 % anual efectivo.
2. 12 % nominal capitalizable mensualmente.
3. 12 % nominal capitalizable diariamente.
4. 12 % continuo.

Solución:

1. $1000(1 + 0.12)^3 \; = \;$ 1404.93 euros.

Una curiosidad matemática: el interés continuo

Ejemplo

¿En cuánto se convierten 1000 euros colocados durante tres años a una tasa de interés del

1. 12 % anual efectivo.
2. 12 % nominal capitalizable mensualmente.
3. 12 % nominal capitalizable diariamente.
4. 12 % continuo.

Solución:

1. $1000(1+0.12)^3 \;=\; 1404.93$ euros.
2. $1000\left(1+\dfrac{0.12}{12}\right)^{3\times 12} \;=\; 1430.77$ euros.

Ejemplo

¿En cuánto se convierten 1000 euros colocados durante tres años a una tasa de interés del

1. 12 % anual efectivo.
2. 12 % nominal capitalizable mensualmente.
3. 12 % nominal capitalizable diariamente.
4. 12 % continuo.

Solución:

1. $1000(1+0.12)^3 \; = \; 1404.93$ euros.
2. $1000\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{3\times 12} \; = \; 1430.77$ euros.
3. $1000\left(1+\frac{0.12}{365}\right)^{3\times 365} \; = \; 1433.24$ euros.

Ejemplo

¿En cuánto se convierten 1000 euros colocados durante tres años a una tasa de interés del

1. 12 % anual efectivo.
2. 12 % nominal capitalizable mensualmente.
3. 12 % nominal capitalizable diariamente.
4. 12 % continuo.

Solución:

1. $1000(1+0.12)^3 \;=\; 1404.93$ euros.
2. $1000\left(1+\dfrac{0.12}{12}\right)^{3\times 12} \;=\; 1430.77$ euros.
3. $1000\left(1+\dfrac{0.12}{365}\right)^{3\times 365} \;=\; 1433.24$ euros.
4. $1000\, e^{0.12\times 3} \;=\; 1433.33$ euros.

Ejemplo

Si $\delta = 0.12$, ¿cuál es el tanto i equivalente?

$e^{\delta} = 1 + i$.

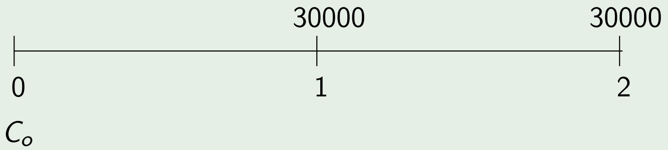
$e^{\delta} = e^{0.12} = 1.1275$.

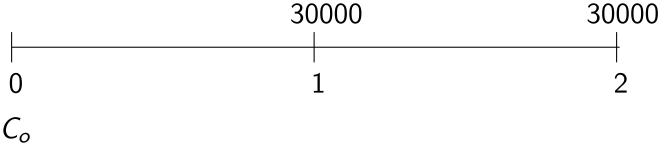
Entonces $i = 0.1275$, es decir, el $12.75\,\%$

Un ejemplo interesante

Ejemplo

Manolo va a matricularse dentro de un año en un master de dos años de duración que le costará 30000 euros por curso.
Su padre quiere ingresar hoy en un Banco una cantidad C_o tal que le permita hacer frente a los dos pagos.
¿Cuál debe ser dicha cantidad si el Banco le ofrece un 8 % de interés anual compuesto?
El esquema de la operación es:





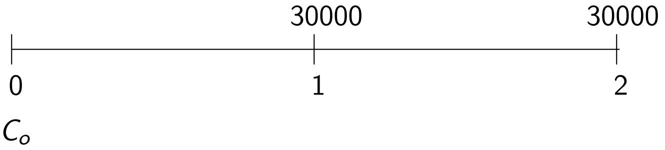
El capital ingresado hoy en el Banco, C_o debe ser equivalente a los dos capitales que necesitará sacar de la cuenta los dos próximos años. Planteamos esta equivalencia en el momento actual ($t = 0$):

$$C_o = 30000(1 + i)^{-1} + 30000(1 + i)^{-2}$$

(Trasladamos los dos capitales de 30000 euros al momento actual)
Entonces $C_o = 30000(1.08)^{-1} + 30000(1.08)^{-2}$.
Es decir, $\boxed{C_o = 53497.94}$ euros.

Un comentario sobre el ejemplo anterior

En el ejemplo anterior, ¿habría dado igual plantear la equivalencia en otro momento, digamos $t = 2$?
Comprobamos que sí:



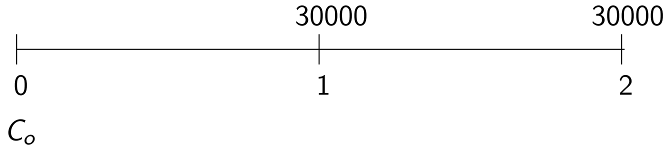
En $t = 2$, el planteamiento de la equivalencia es:

$$C_o(1+i)^2 = 30000(1+i) + 30000 \qquad (*)$$

Entonces $C_0 = \dfrac{30000(1.08) + 30000}{(1.08)^2} = 53497.94$ (como antes)

Un comentario sobre el ejemplo anterior

En el ejemplo anterior, ¿habría dado igual plantear la equivalencia en otro momento, digamos $t = 2$?
Comprobamos que sí:



En $t = 2$, el planteamiento de la equivalencia es:

$$C_o(1+i)^2 = 30000(1+i) + 30000 \qquad (*)$$

Entonces $C_0 = \dfrac{30000(1.08) + 30000}{(1.08)^2} = 53497.94$ (como antes)

$(*)$ Observe que si multiplica esta expresión por $(1+i)^{-2}$ obtiene exactamente el planteamiento que se hizo anteriormente, en $t = 0$.

Otro comentario sobre el ejemplo anterior

Hemos visto que 30000 euros del año 1 más otros 30000 euros del año 2 equivalen, para un 8 % de interés anual, a 53497.94 euros en el año 0. Veamos cómo ocurre esto.
El padre de Manolo ingresa hoy los 53497.94 euros.
Dentro de un año el saldo de la cuenta será:

$$\text{Saldo}_1 \; = \; 53497.94(1.08) = 57777.78 \quad \text{euros}$$

Entonces retira los 30000 que necesita y deja en la cuenta 27777.78 euros.
Esto se transforma un año después, o sea, dentro de dos años, en:

$$\text{Saldo}_2 \; = \; 27777.78(1.08) = 30000 \quad \text{euros}$$

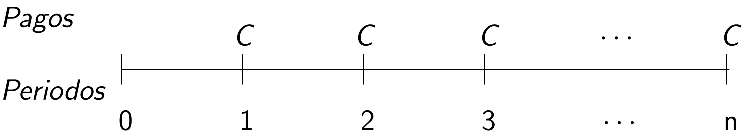
Estos 30000 euros se retirarán para pagar la matrícula del segundo y quedará la cuenta sin saldo.

Una *renta* es un plan financiero formado por pagos regulares.

Por ejemplo, un plan de ahorros, en el cual se va formando un capital mediante pagos sucesivos para disponer de él en un futuro.

O una imposición única grande que dé derecho a cobrar una renta mensual por un plazo limitado o ilimitado de tiempo.

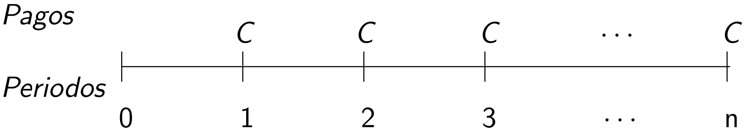
El esquema de una renta *constante* y *pospagable* es el siguiente:



Los **términos de la renta** (todos iguales a C en este caso) se llaman también *pagos* o *anualidades*.

Rentas

El esquema de una renta *constante* y *pospagable* es el siguiente:



Los **términos de la renta** (todos iguales a C en este caso) se llaman también *pagos* o *anualidades*.

De una tal renta interesa calcular:

Valor final: Valor al final de la operación, es decir, en el momento n.

Valor actual: Valor al inicio de la operación, es decir, en el momento 0.

Ejemplo

Invertimos 100 euros al final de cada año, durante 5 años, en una cuenta que paga intereses del 10 % compuesto anual, ¿cuánto dinero tendremos acumulado al cabo de los 5 años?

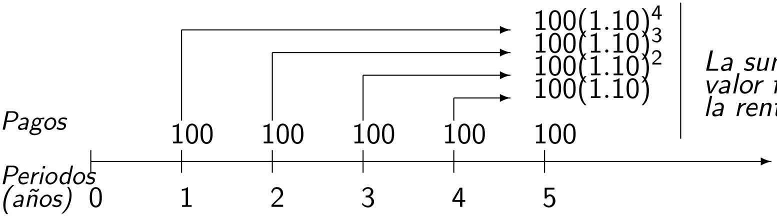
Éste es el **valor final** de la renta.

Ejemplo

Invertimos 100 euros al final de cada año, durante 5 años, en una cuenta que paga intereses del 10 % compuesto anual, ¿cuánto dinero tendremos acumulado al cabo de los 5 años?

Éste es el **valor final** de la renta.

El siguiente esquema resume la situación.



Por tanto, el valor final buscado es

$$V_{final} = 100 + 100(1.10) + 100(1.10)^2 + 100(1.10)^3 + 100(1.10)^4$$

es decir,

$$V_{final} = 100\left(1 + (1.10) + (1.10)^2 + (1.10)^3 + (1.10)^4\right)$$

Por tanto, el valor final buscado es

$$V_{final} = 100 + 100(1.10) + 100(1.10)^2 + 100(1.10)^3 + 100(1.10)^4$$

es decir,

$$V_{final} = 100\,(1 + (1.10) + (1.10)^2 + (1.10)^3 + (1.10)^4)$$

Teniendo en cuenta que los sumandos entre paréntesis están en progresión geométrica de razón $r = 1.10$,

Por tanto, el valor final buscado es

$$V_{final} = 100 + 100(1.10) + 100(1.10)^2 + 100(1.10)^3 + 100(1.10)^4$$

es decir,

$$V_{final} = 100\left(1 + (1.10) + (1.10)^2 + (1.10)^3 + (1.10)^4\right)$$

Teniendo en cuenta que los sumandos entre paréntesis están en progresión geométrica de razón $r = 1.10$, y que la fórmula para calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica es $S = a\,\frac{1 - r^n}{1 - r}$, siendo a el primer término, se tiene que

$$V_{final} = 100\,\frac{1 - (1.10)^5}{1 - 1.10} = 610.51$$

Valor final de una renta

En general, el valor final de una renta pospagable de n términos, todos del mismo valor C, a una tasa de interés i por período, se calcula como

$$V_{final} = C\left(1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}\right)$$

La suma de los n términos entre paréntesis, puesto que forman una progresión geométrica de razón $(1+i)$, se calcula como

$$\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} \quad \text{o, mejor} \quad \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Este valor se suele expresar como $s_{\overline{n}|i}$. Representa el valor final de una renta pospagable de término constante igual a 1 euro, durante n períodos, a una tasa de interés i por período.

Valor final de una renta

Entonces, el valor final de nuestra renta de n términos constantes, todos ellos iguales a C, se calcula como

$$V_{final} = C \cdot s_{\overline{n}|i} = C \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right)$$

Ejemplo

Se depositan 500 euros al final de cada trimestre durante 6 años en una cuenta que paga el 8 % nominal anual, convertible trimestralmente.

- ¿Cuál será el valor final de la renta al cabo de los 6 años?
- Si se mantiene ese dinero en la cuenta durante 9 meses más en los que sigue vigente la misma tasa de interés, ¿cuánto dinero se retirará?

El tipo de interés es el $8\%/4 = 2\%$ trimestral.
El número de términos es $6(4) = 24$.

$$V_{final} = 500 \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) = 500 \left(\frac{(1.02)^{24} - 1}{0.02} \right) = 15210.93 \text{ euros}$$

Si se mantiene durante 9 meses, es decir, tres trimestres más, su valor se multiplica por $(1.02)^3$. Será entonces $15210.93(1.02)^3 = 16142$ euros.

Ejemplo

Una pareja joven quiere ahorrar 15 000 euros durante los siguientes 5 años y luego usar esa cantidad como entrada para la compra de un piso. Para lograrlo, ¿cuánto dinero debe depositar al final de cada trimestre en una cuenta que abona intereses a una tasa del 5 % nominal compuesto trimestralmente?

Se trata de una renta pospagable.
El tipo de interés es el $5\,\%/4 = 1.25\,\%$ trimestral.
El número de términos es $5(4) = 20$ (trimestres).
Conocemos el valor final, 15 000 euros.
Queremos hallar la anualidad (trimestralidad), C

$$V_{final} = C\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \implies C = \frac{i\,V_{final}}{(1+i)^n - 1} \implies$$

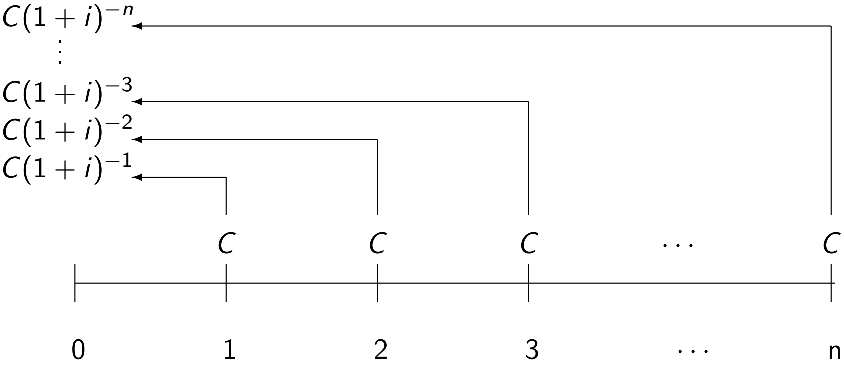
$$\implies C = \frac{0.0125 \times 15\,000}{(1+0.0125)^{20} - 1} = 664.81 \text{ euros al trimestre}$$

Valor actual de una renta

Para una renta constante pospagable, en la que, por tanto, el primer pago se produce a final del primer período, el valor actual es el valor al inicio del primer período, es decir, en el momento $t = 0$.

.

Esquemáticamente:



Por tanto, el valor actual de la renta se calcula como

$$V_{actual} = C(1+i)^{-1} + C(1+i)^{-2} + \cdots + C(1+i)^{-n}$$

es decir,

$$V_{actual} = C\ \left((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n}\right)$$

Los sumandos en el paréntesis forman una progresión geomética de n términos y razón $r = (1+i)^{-1}$. Por tanto, la suma es

$$V_{actual} = C\ \left((1+i)^{-1}\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}\right) = C\ \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

El valor entre paréntesis se denota por $a_{\overline{n}|i}$. Representa el valor actual de una renta pospagable de término constante igual a 1 euro, con n términos, y un tanto de interés i por período.

En resumen, el valor actual de una renta de n términos constantes, todos ellos iguales a C, se calcula como

$$V_{actual} = C \cdot a_{\overline{n}|i} = C \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right)$$

Ejemplo

Al cumplir 65 años el señor Pérez desea depositar una cantidad de dinero en un Banco que a cambio le pague una anualidad de 5000 euros durante cada uno de los próximos 10 años. El primer pago lo recibirá al cumplir 66 años. El tanto de interés pactado es del 7 % anual. ¿Cuál es la cantidad que debe depositar?

Ejemplo

Al cumplir 65 años el señor Pérez desea depositar una cantidad de dinero en un Banco que a cambio le pague una anualidad de 5000 euros durante cada uno de los próximos 10 años. El primer pago lo recibirá al cumplir 66 años. El tanto de interés pactado es del 7 % anual. ¿Cuál es la cantidad que debe depositar?

Calcular lo que debe depositar es hallar el valor actual de la renta que desea percibir.

(Continuación)

El valor actual es:

$$V_{actual} = 5000 \cdot a_{\overline{n}|i} = 5000 \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right)$$

O sea,

$$V_{actual} = 5000 \left(\frac{1-(1+0.07)^{-10}}{0.07} \right) = 35117.9 \text{ euros}$$

Para recibir la renta deseada, el señor Pérez debe depositar hoy 35 117.9 euros en el Banco.

Valor actual

Ejemplo

Una pareja ha recibido una herencia de 100 000 euros. Con ella quieren constituir una renta que cobrarán a finales de cada trimestre durante los próximos 6 años (mientras sus hijos estarán en la universidad). Si la cuenta paga un interés del 7 % nominal compuesto trimestralmente, ¿de qué cuantía serán los pagos trimestrales que recibirán?

Los 100 000 euros constituyen el valor actual de la renta. Queremos hallar el pago, C. Para ello,

$$V_{actual} = C\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \Longrightarrow C = \frac{i \times V_{actual}}{1-(1+i)^{-n}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C = \frac{0.0175 \times 100\,000}{1-(1+0.0175)^{-24}} = 5\,138.57 \text{ euros trimestrales}$$

Ejemplo interesante

Ejemplo

Supongamos que en la compra de una lavadora cuyo precio es de 550 euros nos proponen pagar 150 euros al contado y 80 euros trimestrales durante 6 trimestres. ¿Qué interés anual nos cobran por el pago aplazado?

Los 6 pagos trimestrales de 80 euros constituyen una renta pospagable cuyo valor actual será

$$80 \cdot a_{\overline{6}|i_4} = 80 \cdot \frac{1-(1+i_4)^{-6}}{i_4}$$

donde i_4 es el tanto trimestral de interés.

Ejemplo interesante

Ejemplo

Supongamos que en la compra de una lavadora cuyo precio es de 550 euros nos proponen pagar 150 euros al contado y 80 euros trimestrales durante 6 trimestres. ¿Qué interés anual nos cobran por el pago aplazado?

Los 6 pagos trimestrales de 80 euros constituyen una renta pospagable cuyo valor actual será

$$80 \cdot a_{\overline{6}|i_4} = 80 \cdot \frac{1-(1+i_4)^{-6}}{i_4}$$

donde i_4 es el tanto trimestral de interés.

Entonces, debe ser

$$550 = 150 + 80 \cdot a_{\overline{6}|i_4} \Rightarrow a_{\overline{6}|i_4} = \frac{400}{80} = 5 \Rightarrow \frac{1-(1+i_4)^{-6}}{i_4} = 5$$

Resolviendo esta ecuación (con Mathematica, Excel o WolframAlpha, por ejemplo) se obtiene que $i_4 = 0.0547179$.

El tanto trimestral es $i_4 = 0.0547179$.

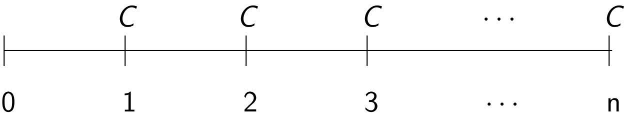
Para hallar el tanto anual, usamos que

$$1 + i = (1 + i_4)^4 \quad \text{de donde} \quad i = (1 + 0.0547179)^4 - 1 = 0.2375$$

En resumen, el tanto de interés anual es el 23.75 %.

Relación entre el valor final y el valor actual

Hemos visto que, para una renta constante:

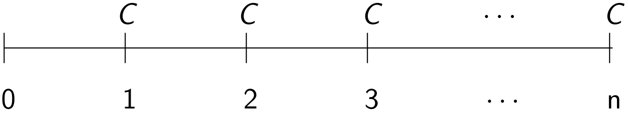


$$V_{final} = C \cdot s_{\overline{n}|i} = C \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) \qquad \text{(valor en } t = n\text{).}$$

$$V_{actual} = C \cdot a_{\overline{n}|i} = C \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right) \qquad \text{(valor en } t = 0\text{).}$$

Relación entre el valor final y el valor actual

Hemos visto que, para una renta constante:



$$V_{final} = C \cdot s_{\overline{n}|i} = C\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \qquad \text{(valor en } t = n\text{).}$$

$$V_{actual} = C \cdot a_{\overline{n}|i} = C\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \qquad \text{(valor en } t = 0\text{).}$$

Podemos observar que

$$V_{final} = C\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) = C\,(1+i)^n\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) =$$

$$= (1+i)^n \cdot V_{actual}$$

Se tiene, pues, $V_{final} = (1+i)^n \cdot V_{actual}$.

Es decir, el valor final se puede calcular alternativamente como resultado de capitalizar el valor actual durante los n períodos.

En particular, $s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n a_{\overline{n}|i}$

¿Cómo se calcularía el valor de la misma renta en el momento $t = 1$?

Se tiene, pues, $V_{final} = (1+i)^n \cdot V_{actual}$.

Es decir, el valor final se puede calcular alternativamente como resultado de capitalizar el valor actual durante los n períodos.

En particular, $s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n a_{\overline{n}|i}$

¿Cómo se calcularía el valor de la misma renta en el momento $t = 1$?

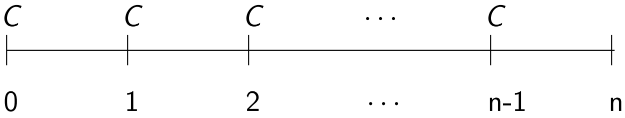
$(1+i) \cdot V_{actual}$

("trasladamos" el valor actual de $t = 0$ a $t = 1$)

Rentas prepagables

Una renta se dice **prepagable** si el primer pago tiene lugar a comienzos del primer período.

Así, una renta de n términos constante y prepagable es, esquemáticamente:

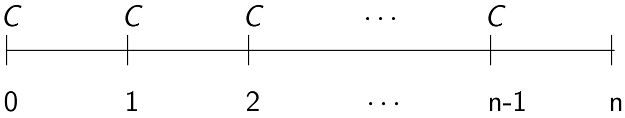


(Pagar al principio de un período se considera equivalente a pagar al final del período precedente)

Rentas prepagables

Una renta se dice **prepagable** si el primer pago tiene lugar a comienzos del primer período.

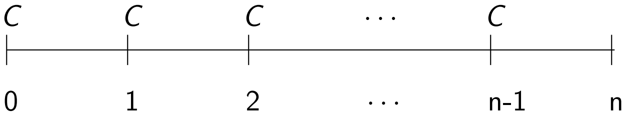
Así, una renta de *n* términos constante y prepagable es, esquemáticamente:



(Pagar al principio de un período se considera equivalente a pagar al final del período precedente)

Si calculáramos el valor actual "como" si la renta fuera pospagable, nos daría el valor en el momento $t = -1$.
Para obtenerlo en el momento $t = 0$, basta multiplicarlo por $(1 + i)$.

Rentas prepagables



Es decir, para una renta **prepagable**:

$$V_{actual} = C \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right) (1+i) = C\, a_{\overline{n}|i}\, (1+i)$$

De manera análoga,

$$V_{final} = C \left(\frac{(1+i)^{n}-1}{i} \right) (1+i) = C\, s_{\overline{n}|i}\, (1+i)$$

Resumen de fórmulas

Para rentas constantes:

	Valor actual	**Valor final**
Pospagables	$C \cdot a_{\overline{n}\vert i}$	$C \cdot s_{\overline{n}\vert i}$
Prepagables	$C \cdot a_{\overline{n}\vert i} \cdot (1+i)$	$C \cdot s_{\overline{n}\vert i} \cdot (1+i)$

donde C es el término constante de la renta, i el tanto de interés, n el número de términos y

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \qquad s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

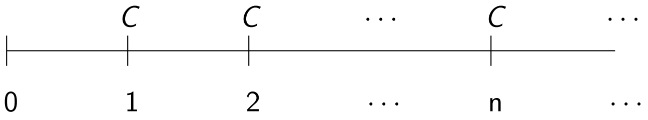
Rentas perpetuas

Las rentas vistas hasta ahora tienen un número finito de términos.

Se puede decir que son rentas *temporales* para distinguirlas de las *rentas perpetuas*, que tienen un número infinito de términos.

En la práctica, se considera como perpetua cualquier renta con un número grande e indefinido de términos, como puede ser el alquiler de una casa según un contrato de renta antigua, o los ingresos por la explotación de una finca rústica.

El siguiente esquema representa una renta constante, perpetua y pospagable.



Para una renta perpetua, no cabe hablar de *valor final*, pero sí de *valor actual*.

El valor actual de la renta perpetua se define como el límite cuando n tiende a infinito del valor actual de la renta temporal formada por los n primeros términos. O sea,

$$V_{actual} = \lim_{n \to \infty} C \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} =$$

Valor actual de una renta perpetua

Para una renta perpetua, no cabe hablar de *valor final*, pero sí de *valor actual*.

El valor actual de la renta perpetua se define como el límite cuando n tiende a infinito del valor actual de la renta temporal formada por los n primeros términos. O sea,

$$V_{actual} = \lim_{n \to \infty} C \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C \cdot \frac{1}{i}$$

En definitiva, para una renta perpetua pospagable, $\boxed{V_{actual} = \frac{C}{i}}$

Valor actual de una renta perpetua

Para una renta perpetua, no cabe hablar de *valor final*, pero sí de *valor actual*.

El valor actual de la renta perpetua se define como el límite cuando n tiende a infinito del valor actual de la renta temporal formada por los n primeros términos. O sea,

$$V_{actual} = \lim_{n \to \infty} C \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C \cdot \frac{1}{i}$$

En definitiva, para una renta perpetua pospagable, $\boxed{V_{actual} = \frac{C}{i}}$

NOTA: Para una renta perpetua prepagable, $V_{actual} =$

Valor actual de una renta perpetua

Para una renta perpetua, no cabe hablar de *valor final*, pero sí de *valor actual*.

El valor actual de la renta perpetua se define como el límite cuando n tiende a infinito del valor actual de la renta temporal formada por los n primeros términos. O sea,

$$V_{actual} = \lim_{n \to \infty} C \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C \cdot \frac{1}{i}$$

En definitiva, para una renta perpetua pospagable, $\boxed{V_{actual} = \frac{C}{i}}$

NOTA: Para una renta perpetua prepagable, $\boxed{V_{actual} = \frac{C}{i}(1+i)}$.

Ejemplo

Para que una persona pueda percibir al final de cada mes y por el resto de sus días una cierta cantidad se depositan 20000 euros en una entidad que paga el 7 % anual.

1. Calcúlese la cantidad que percibirá al final de cada mes.
2. Si la persona llegara a cobrar dicha cantidad durante exactamente 30 años, ¿cuál sería el valor actual de esta renta?
3. ¿Y si lo hace durante 50 años?

Se trata de una renta **perpetua** pospagable. Su valor actual será

$$20000 = \frac{C}{i_{12}}$$

donde C será la mensualidad que cobrará e i_{12} el tanto mensual de interés.

Ejemplo

Para que una persona pueda percibir al final de cada mes y por el resto de sus días una cierta cantidad se depositan 20000 euros en una entidad que paga el 7 % anual.

1. Calcúlese la cantidad que percibirá al final de cada mes.
2. Si la persona llegara a cobrar dicha cantidad durante exactamente 30 años, ¿cuál sería el valor actual de esta renta?
3. ¿Y si lo hace durante 50 años?

Se trata de una renta **perpetua** pospagable. Su valor actual será

$$20000 = \frac{C}{i_{12}}$$

donde C será la mensualidad que cobrará e i_{12} el tanto mensual de interés. Lo calculamos

$$1 + i = (1 + i_{12})^{12} \quad \Rightarrow \quad i_{12} = (1 + 0.07)^{1/12} - 1 = 0.00565415$$

$$\text{Entonces} \quad C = 20000\, i_{12} = 20000\,(0.00565415) = 113.83 \quad \text{euros}$$

Si la persona cobra los $C = 113.84$ euros mensuales durante exactamente 30 años (=360 meses), el valor actual es

$$C \cdot a_{\overline{360}|i_{12}} = 17372.7 \quad \text{euros.}$$

(Está algo lejos de los 20000 que se pusieron)

(Continuación)

Si la persona cobra los $C = 113.84$ euros mensuales durante exactamente 30 años (=360 meses), el valor actual es

$$C \cdot a_{\overline{360}|i_{12}} = 17372.7 \quad \text{euros.}$$

(Está algo lejos de los 20000 que se pusieron)

¿Y si la cobrara durante 50 años?. El valor actual será

$$C \cdot a_{\overline{600}|i_{12}} = 19321 \quad \text{euros.}$$

(Esto ya está bastante cerca de los 20000 euros)

Préstamos

Una persona (prestamista) entrega a otra (prestatario) una cierta suma de dinero que la segunda se compromete a reembolsar en determinadas condiciones, pagando además el interés convenido.

Préstamos

Una persona (prestamista) entrega a otra (prestatario) una cierta suma de dinero que la segunda se compromete a reembolsar en determinadas condiciones, pagando además el interés convenido.

Un préstamo se puede amortizar

- Mediante reembolso único.
- Mediante una serie de pagos (renta).

Préstamos

Una persona (prestamista) entrega a otra (prestatario) una cierta suma de dinero que la segunda se compromete a reembolsar en determinadas condiciones, pagando además el interés convenido.

Un préstamo se puede amortizar

- Mediante reembolso único.
- Mediante una serie de pagos (renta).

En el segundo caso, la amorización puede hacerse:

1. Mediante pagos (= anualidades) constantes (**Sistema francés**).
2. Mediante pagos variables en progresión aritmética o geométrica.
3. Mediante cuotas de amortización constantes (**Sistema italiano**).
4. Mediante un fondo de amortización (Sistema americano)

Se devuelve el préstamo mediante una renta pospagable y con pagos constantes.

Las anualidades pagan el préstamo junto con los intereses. Cada anualidad (C) puede descomponerse como una suma

$$C = I_k + A_k$$

donde

I_k es la parte destinada a pagar intereses. Se llama *cuota de interés.*

A_k la parte destinada a pagar el capital (=principal). Se llama *cuota de amortización*.

Préstamos con anualidades constantes. (Sistema francés)

Ejemplo

Un préstamo de 500 euros a pagar en cuatro anualidades mediante el sistema francés a un tanto del 10 % anual.

Calculamos la anualidad:

$$500 = C\, a_{\overline{4}|0.10} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{500}{\frac{1-(1.1)^{-4}}{0.1}} = 157.735$$

(Redondearemos al decimal más próximo)

Así, la anualidad a pagar es $\boxed{C = 157.7}$ euros.

Cuadro de amortización del préstamo del ejemplo.

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7				

Cuadro de amortización del préstamo del ejemplo.

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7	50			

Cuadro de amortización del préstamo del ejemplo.

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7	50	107.7		

Cuadro de amortización del préstamo del ejemplo.

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7	50	107.7	107.7	392.3
2	157.7	39.2			

Cuadro de amortización del préstamo del ejemplo.

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7	50	107.7	107.7	392.3
2	157.7	39.2	118.5	226.2	273.8
3	157.7	27.4	130.3	356.5	143.5
4	157.7	14.4	143.3	$499.8 \backsimeq 500$	0

Cuadro de amortización del préstamo del ejemplo.

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7	50	107.7	107.7	392.3
2	157.7	39.2	118.5	226.2	273.8
3	157.7	27.4	130.3	356.5	143.5
4	157.7	14.4	143.3	$499.8 \backsimeq 500$	0

La anualidad (pago) es lo primero que hemos hallado.

A continuación se han calculado, fila a fila:

$$I_k = i\, D_{k-1}, \qquad A_k = C_k - I_k, \qquad M_k = \sum_{i=1}^{k} A_i$$

$$D_k = D_{k-1} - A_k = D_o - M_k.$$

Relación entre las cuotas de amortización

1. $A_{k+1} = A_k(1+i). \quad (k = 1, \cdots, n-1).$
2. $A_n = \dfrac{C}{1+i}.$

Vemos por qué.

$$C = I_k + A_k = I_{k+1} + A_{k+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_{k+1} - A_k = I_k - I_{k+1} = iD_{k-1} - iD_k = i(D_{k-1} - D_k) = iA_k$$

Se tiene, pues, que $A_{k+1} - A_k = iA_k$ de donde $A_{k+1} = A_k(1+i)$.

Por otra parte, $0 = D_n = D_{n-1} - A_n$, de donde $A_n = D_{n-1}$.
Entonces, $C = I_n + A_n = iD_{n-1} + A_n = iA_n + A_n = (1+i)A_n$.
De donde $A_n = \frac{C}{1+i}$.

Observación: La primera relación nos dice que las cuotas de amortización forman una progresión geométrica de razón $(1+i)$.

Ejemplos

Ejemplo

En un préstamo de cuantía 111846 euros, que se amortiza con anualidades constantes al 12 % de interés anual y en 10 años, calcúlese la cuota de amortización del año 7.

$$\text{La anualidad es } C = \frac{111846}{a_{\overline{10}|0.12}} = \frac{111846}{\frac{1-(1.12)^{-10}}{0.12}} = 19795.$$

La primera cuota de interés es $I_1 = 0.12(111846) = 13421.5$. Entonces la primera cuota de amortización es $A_1 = C - I_1 = 6373.5$.

Teniendo en cuenta la relación $A_{k+1} = A_k(1+i)$, tenemos que la séptima cuota de amortización es:

$$A_7 = A_1(1+i)^6 = 6373.5(1.12)^6 = 12580.2$$

Una observación

En cualquier momento, la deuda pendiente (=saldo) puede calcularse como el valor actual en dicho momento de las anualidades pendientes de pagar. Por ejemplo,

Una observación

En cualquier momento, la deuda pendiente (=saldo) puede calcularse como el valor actual en dicho momento de las anualidades pendientes de pagar. Por ejemplo,

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7				

Una observación

En cualquier momento, la deuda pendiente (=saldo) puede calcularse como el valor actual en dicho momento de las anualidades pendientes de pagar. Por ejemplo,

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7	50			

Préstamos con anualidades constantes. (Sistema francés)

Una observación

En cualquier momento, la deuda pendiente (=saldo) puede calcularse como el valor actual en dicho momento de las anualidades pendientes de pagar. Por ejemplo,

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7	50	107.7		

Una observación

En cualquier momento, la deuda pendiente (=saldo) puede calcularse como el valor actual en dicho momento de las anualidades pendientes de pagar. Por ejemplo,

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7	50	107.7	107.7	392.3
2	157.7	39.2			

Una observación

En cualquier momento, la deuda pendiente (=saldo) puede calcularse como el valor actual en dicho momento de las anualidades pendientes de pagar. Por ejemplo,

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					500
1	157.7	50	107.7	107.7	392.3
2	157.7	39.2	118.5	226.2	273.8
3	157.7	27.4	130.3	356.5	143.5
4	157.7	14.4	143.3	$499.8 \simeq 500$	0

Vemos en el cuadro que la deuda pendiente a finales del primer año, justo después de pagar la primera anualidad, es de 392.3 eur.

(Continuación)
Pues bien, si no tuviéramos el cuadro, podemos calcular directamente dicha deuda pendiente como el valor actual de las tres anualidades pendientes (de 157.7 euros cada una).

(Continuación)
Pues bien, si no tuviéramos el cuadro, podemos calcular directamente dicha deuda pendiente como el valor actual de las tres anualidades pendientes (de 157.7 euros cada una).

$$157.7\,\frac{1-(1.1)^{-3}}{0.1} = 392.3$$

Cálculo de la T.A.E. de un préstamo

Ejemplo

Una pareja ha comprado un piso y un Banco le ha concedido un préstamo hipotecario por valor de 100 000 euros, que se pagará en mensualidades constantes durante veinte años a una tasa de interés fijo nominal del 6 %. El Banco cobra una comisión de apertura del 1 % del valor del préstamo. Se pide:

1. Tasa de interés efectivo anual sin considerar la comisión de apertura.
2. Cuantía de la mensualidad.
3. Tasa anual equivalente (T.A.E.) (se incluye la comisión).

Ejemplo

Una pareja ha comprado un piso y un Banco le ha concedido un préstamo hipotecario por valor de 100 000 euros, que se pagará en mensualidades constantes durante veinte años a una tasa de interés fijo nominal del 6 %. El Banco cobra una comisión de apertura del 1 % del valor del préstamo. Se pide:

1. Tasa de interés efectivo anual sin considerar la comisión de apertura.
2. Cuantía de la mensualidad.
3. Tasa anual equivalente (T.A.E.) (se incluye la comisión).

1. El T.I.N. del 6 % significa que el interés mensual es
$$i_{12} = \frac{6\,\%}{12} = \boxed{0.5\,\%}$$

Ejemplo

Una pareja ha comprado un piso y un Banco le ha concedido un préstamo hipotecario por valor de 100 000 euros, que se pagará en mensualidades constantes durante veinte años a una tasa de interés fijo nominal del 6 %. El Banco cobra una comisión de apertura del 1 % del valor del préstamo. Se pide:

1. Tasa de interés efectivo anual sin considerar la comisión de apertura.
2. Cuantía de la mensualidad.
3. Tasa anual equivalente (T.A.E.) (se incluye la comisión).

1. El T.I.N. del 6 % significa que el interés mensual es
$$i_{12} = \frac{6\,\%}{12} = \boxed{0.5\,\%}$$
El tanto efectivo anual sale de $1 + i = (1 + i_{12})^{12}$.
Por tanto, $i = (1 + 0.005)^{12} - 1 = \boxed{6.17\,\%}$

2. Calculamos la mensualidad C:

$$100\,000 = C\,\frac{1-(1+0.005)^{-12\times 20}}{0.005} \quad\Longrightarrow\quad C = 716.43 \text{ euros}$$

3. Queremos hallar la T.A.E.
La comisión de apertura es del 1 % de 100 000, o sea 1 000 euros. Por tanto, la pareja recibe sólo 99 000 euros.
Buscamos el tanto de interés mensual i_{12} tal que

$$99\,000 = 716.43\,\frac{1-(1+i_{12})^{-240}}{i_{12}}$$

Esta ecuación con incógnita i_{12} se puede resolver con Mathematica o Excel, por ejemplo.
Sale que el interés mensual es $i_{12} = 0.0510425$.
El equivalente anual es $(1+i_{12})^{12}-1 = 0.063$.
Es decir, la T.A.E. es un $\boxed{6.3\,\%}$.

Préstamos con cuotas de amortización constantes. (Sistema italiano)

Es el método más simple.
Si D_o es el total del préstamo y se va a pagar en n anualidades, las cuotas de amortización son todas

$$A_k = A = \frac{D_o}{n}$$

Además de eso, hay que pagar la cuota de interés en cada anualidad.

Por ejemplo, hacemos el cuadro de amortización de un préstamo de 4000 euros a pagar por este sistema en 4 años al 7 % de interés anual.

La cuota de amortización A_k es constante e igual a $4000/4 = 1000$. Las cuotas de interés I_k se calculan como antes, Y la anualidad será la suma $I_k + A_k$.

El cuadro de amortización aparece a continuación.

Cuadro de amortización de un préstamo con cuotas de amortización constantes. (Ejemplo)

Año k	Pago C_k	C. de interés I_k	C. de amort. A_k	Tot. amort. M_k	Saldo D_k
0					4000
1	1280	280	1000	1000	3000
2	1210	210	1000	2000	2000
3	1140	140	1000	3000	1000
4	1070	70	1000	4000	0

En el ejemplo se observa que las anualidades son decrecientes en progresión aritmética.

En general, para un préstamo con cuotas de amortización constantes, se tiene que $C_{k+1} = C_k - iA$, donde A es la cuota constante de amortización.

¿Cuál es el sistema habitual de préstamos en España?

Es el sistema francés, con anualidad (=mensualidad generalmente) constante.

¿Cuál es el sistema habitual de préstamos en España?

Es el sistema francés, con anualidad (=mensualidad generalmente) constante.

Pero el tipo de interés suele ser *variable*, revisable cada año o cada semestre.
Entonces, la anualidad, ¿es constante o no?

¿Cuál es el sistema habitual de préstamos en España?

Es el sistema francés, con anualidad (=mensualidad generalmente) constante.

Pero el tipo de interés suele ser *variable*, revisable cada año o cada semestre.
Entonces, la anualidad, ¿es constante o no?
No. Se actualiza tras cada revisión.

¿Cuál es el sistema habitual de préstamos en España?

Es el sistema francés, con anualidad (=mensualidad generalmente) constante.

Pero el tipo de interés suele ser *variable*, revisable cada año o cada semestre.
Entonces, la anualidad, ¿es constante o no?
No. Se actualiza tras cada revisión.

En el momento del préstamo, se calcula la mensualidad constante *como si* el tipo de interés vigente en ese momento fuera a ser el mismo durante todo el tiempo de vigor del préstamo.

¿Cuál es el sistema habitual de préstamos en España?

Es el sistema francés, con anualidad (=mensualidad generalmente) constante.

Pero el tipo de interés suele ser *variable*, revisable cada año o cada semestre.
Entonces, la anualidad, ¿es constante o no?
No. Se actualiza tras cada revisión.

En el momento del préstamo, se calcula la mensualidad constante *como si* el tipo de interés vigente en ese momento fuera a ser el mismo durante todo el tiempo de vigor del préstamo.

Pero, pasado digamos un año (o el plazo estipulado), se procede a revisar el tipo de interés.

Entonces se considera la deuda pendiente (=saldo) y se recalcula la cuota al nuevo tipo de interés.

¿Cuál es el sistema habitual de préstamos en España?

Es el sistema francés, con anualidad (=mensualidad generalmente) constante.

Pero el tipo de interés suele ser *variable*, revisable cada año o cada semestre.
Entonces, la anualidad, ¿es constante o no?
No. Se actualiza tras cada revisión.

En el momento del préstamo, se calcula la mensualidad constante *como si* el tipo de interés vigente en ese momento fuera a ser el mismo durante todo el tiempo de vigor del préstamo.

Pero, pasado digamos un año (o el plazo estipulado), se procede a revisar el tipo de interés.

Entonces se considera la deuda pendiente (=saldo) y se recalcula la cuota al nuevo tipo de interés.

Y este proceso se repite cada año.

Periodo de carencia

A veces se acuerda no empezar a pagar un préstamo hasta varios períodos después.

El plazo en que no se paga préstamo, se llama *periodo de carencia*.

Lo habitual es que durante el período de carencia se paguen sólo los intereses. La deuda pendiente permanece invariable.

Si no se pagaran ni siquiera los intereses, se acumularían a la deuda pendiente, aumentándola.