PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
S.A.E.M. THALES

ESTALMAT
Estímulo del Talento Matemático
Prueba de selección
8 de junio de 2013

Nombre:...

Apellidos:...

Localidad:... **Provincia**: ....

Fecha de nacimiento: ..../......./..... **Lugar de nacimiento:** ....

Teléfonos(fijo y móvil)...

Sexo: Hombre ☐ Mujer ☐ **Centro:** Público: ☐ Privado/Concertado: ☐

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

1. **En primer lugar debes leer todos los problemas y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.**

2. **Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza, por favor, el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco (tienes dos y si necesitas más, puedes pedirlas, pero recuerda que en ellas debes escribir también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja).**

De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos problemas distintos. Al final debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

3. **Queremos conocer no solamente tus soluciones sino, sobre todo, tus propios caminos hacia la solución. Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas deberías tratar de describirlas de la manera más clara posible. Para ello bastará unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales o incompletas de los problemas propuestos.**

Además tenemos una curiosidad, ¿cómo te has enterado de esta convocatoria?

☐ A través de tu Centro.

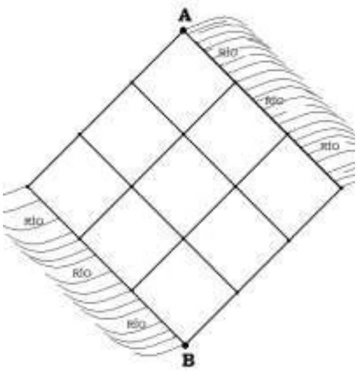
☐ A través de la *Olimpiada Thales*.

☐ A través de otros medios. Indícalos: ....

Tienes dos horas y media en total.
¡Te deseamos mucho éxito!

1. EL PUENTE COLGANTE

Pablo desea atravesar un puente colgante desde el punto A hasta el punto B. Para ello puede elegir entre varios y distintos itinerarios indicados en la figura de la izquierda según las siguientes reglas:



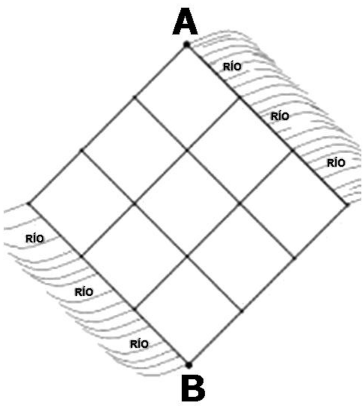
R1) Únicamente puede pasar por los caminos indicados en la cuadrícula del puente.

R2) Es un camino siempre “descendente”, por tanto no puede retroceder en ningún caso.

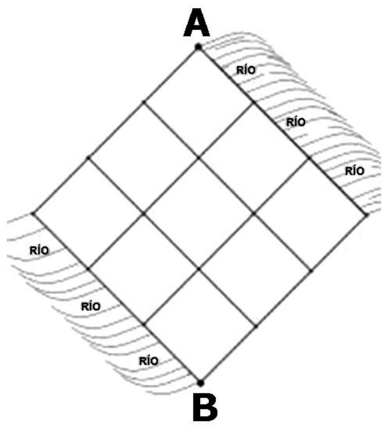
R3) Se indicará con 0, si elige un lado del camino hacia la izquierda y con 1, si lo toma hacia la derecha, según se indica en el esquema a la derecha

Atendiendo a estas reglas, contesta a las siguientes cuestiones:

a) Dibuja sobre la propia cuadrícula del dibujo los siguientes itinerarios 110010 y 010101.

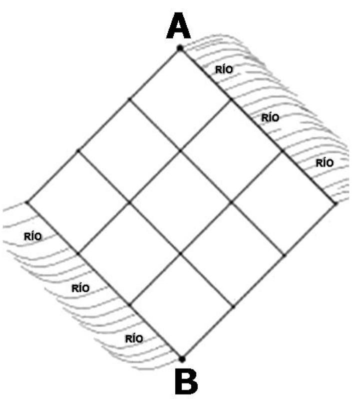


Itinerario 110010

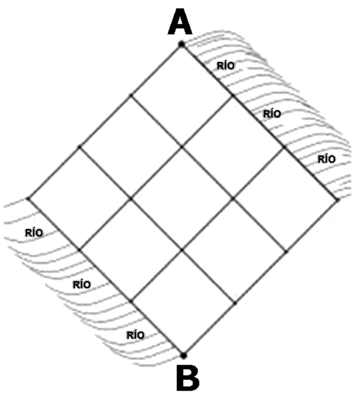


Itinerario 010101

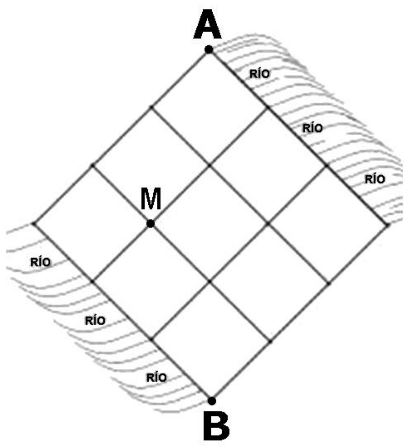
b) Escribe, usando ceros y unos, todos los itinerarios posibles para ir de A hasta B que tengan **<u>un solo tramo</u>** en la orilla del río.



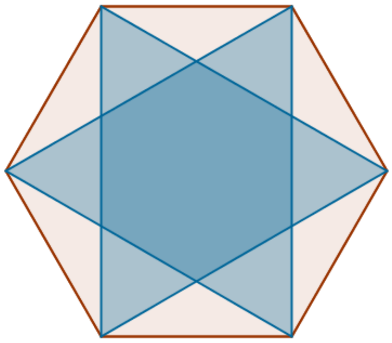
c) Escribe, usando ceros y unos, todos los itinerarios posibles para ir de A hasta B que tengan **<u>exactamente dos tramos</u>** por la orilla del río.



d) Si sabemos que Pablo ha pasado por el punto M, escribe, usando ceros y unos, todos los itinerarios posibles desde el punto A hasta el punto B pasando por M.

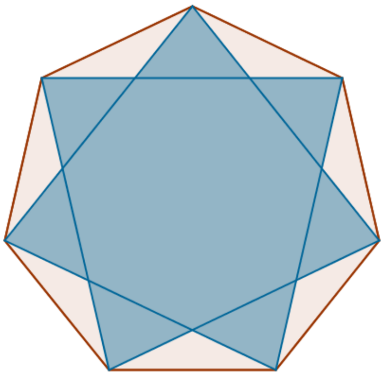


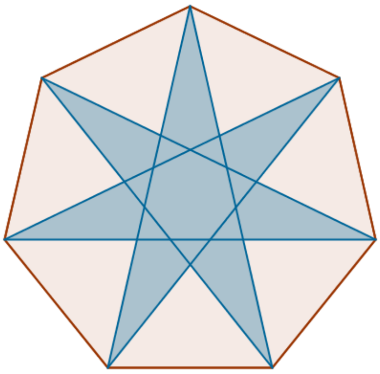
2. ESTRELLAS Y POLÍGONOS



Usando los vértices de un hexágono regular se puede dibujar una estrella de 6 puntas. Observa, a la izquierda, que está formada por dos triángulos equiláteros, que en el centro se forma otro hexágono regular y que esta estrella no se puede trazar totalmente sin levantar el lápiz del papel.

En un heptágono regular se pueden construir dos estrellas distintas de 7 puntas. Las dos se pueden dibujar partiendo de un vértice y completando la estrella en un solo trazo (sin levantar el lápiz del papel).





a) En un octógono regular, ¿cuántas estrellas distintas (de 8 puntas) se pueden formar? ¿Son de un trazo o están formadas por varios polígonos?

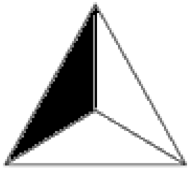
b) En un eneágono regular, ¿cuántas estrellas distintas (de 9 puntas) se pueden formar? ¿Cómo son?

c) ¿Y en un polígono regular de 11 lados? ¿Cuántas se pueden formar y cómo son?

d) ¿Y en un polígono regular de 35 lados? ¿Cuántas se pueden formar y cómo son?

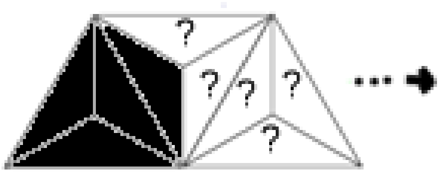
3. CONSTRUCCIONES CON TRIÁNGULOS Y CON CUADRADOS

Queremos construir fichas triangulares como las de la figura. Se trata de triángulos equiláteros divididos en tres partes iguales. Cada una de estas partes puede estar pintada de color negro o de color blanco; en la figura se muestra la pieza que tiene una parte negra y dos blancas, que puede ponerse en varias posiciones girándola.



a) ¿Cuántas fichas diferentes podemos construir?

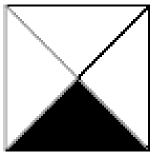
b) ¿Podemos situarlas todas en una fila, empezando por la ficha que tiene todas las partes negras, tal como se esquematiza en la figura siguiente, de forma que cada parte de un triángulo sea del mismo color que la parte del otro triángulo en contacto con ella?



En caso afirmativo, ¿de cuántas maneras podemos hacerlo?

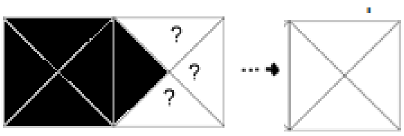
c) ¿Podemos formar con todas las fichas un triángulo equilátero mayor, con la condición de coincidencia de colores indicada en el apartado anterior? En caso afirmativo, explica todas las posibilidades empezando por situar la pieza que es toda de color negro.

Ahora, en lugar de triángulos vamos a jugar con cuadrados, divididos estos en cuatro partes, de forma que podemos pintar cada una de las partes de uno de los dos colores indicados.



d) ¿Cuántas fichas diferentes podemos construir?

e) Ahora queremos situarlas todas en una fila, empezando por la que tiene todas las partes de color negro, con la condición habitual de que las partes en contacto sean del mismo color y de forma que cada pieza que pongamos tenga un número menor o igual de partes negras que la pieza anterior.



¿Lo podremos lograr? En caso afirmativo, ¿de cuántas maneras podemos hacerlo?

.

4. LA MÁQUINA QUE DA CAMBIO

Una máquina que proporciona cambio, acepta cambiar sólo billetes de 10 €, 20 €, 50 € y 100 €. Funciona de la siguiente manera:

- **Un billete de 10 € lo cambia por 2 de 5 €**
- **Un billete de 20 € lo cambia por 1 de 10 € y 2 de 5 €**
- **Un billete de 50 € lo cambia por 1 de 20 €, 2 de 10 € y 2 de 5 €**
- **Un billete de 100 € lo cambia por 1 de 50 €, 1 de 20 €, 2 de 10 € y 2 de 5 €**

De entrada, se llena la máquina con tantos billetes de 5 €, 10 €, 20 € y 50 € como sean necesarios (sin poner ni uno más) para que ésta pueda cambiar exactamente 1000 billetes (sea cual sea el tipo de billete que se quiera cambiar).

a) ¿Cuántos billetes de cada clase hay que poner en la máquina (sin poner ni uno más) para asegurar poder hacer esos 1000 cambios, independientemente del billete que se quiera cambiar?

b) Si, con la máquina llena como al principio, cambiamos 200 billetes de 100 €, 40 billetes de 50 € y 100 billetes de 20 €, ¿cuántos billetes de cada clase quedarán en la máquina? (Cuenta los que van quedando y los que han entrado).

c) De nuevo, con la máquina inicialmente llena, hacemos 1000 operaciones de cambio tras las cuales hay en la máquina un total de 300 billetes de 100 €, 900 de 50 €, 600 de 20 € y 1300 de 10 €. ¿Cuántos billetes de cada clase se han introducido en la máquina en estas 1000 operaciones de cambio?

d) Ahora rellenamos la máquina para que se puedan cambiar exactamente 2000 billetes, sean del tipo que sean. Una vez hechas las 2000 operaciones de cambio encontramos que en la máquina quedan 2000 billetes de 50 €, 1500 billetes de 20 €, 2000 billetes de 10 € y también algunos billetes de 100 €. ¿Cuántos billetes de cada clase se han cambiado?

5. DEDUCIENDO COMO SHERLOCK-HOLMES

Como puedes ver, en estas tablas hemos colocado en la primera fila y por orden, los números del **1** al **13**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

En la segunda fila has de poner también esos mismos números, en cierto orden y sin repetir ninguno, y en la tercera fila, en cada casilla, la suma de los números correspondientes a la primera y a la segunda fila.

Queremos que, en cada uno de los tres casos que te proponemos, trates de ver si es posible, o no es posible, colocarlos de forma que se cumpla la condición que te indicamos. Si es posible, debes poner un ejemplo y si no es posible, debes explicar por qué.

Caso-1
Situar los números de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas en la tercera fila sean iguales.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Caso-2
Situar los números de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas en la tercera fila sean números impares.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Caso-3
De nuevo, situar los números de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas en la tercera fila sean números <u>múltiplos de tres</u>**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Caso-4
Análogamente, situar los números de la segunda **fila de forma que todos los resultados que obtengas sean números <u>cuadrados perfectos</u>.**
(Recuerda que son cuadrados perfectos los números que se obtienen multiplicando un número por si mismo: por ejemplo 9 que es 3x3 ó 16 que es 4x4).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13