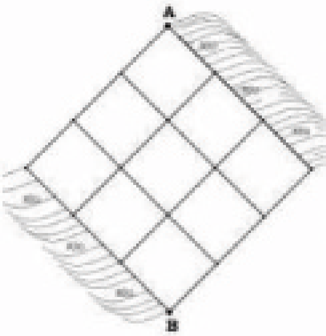
1. EL PUENTE COLGANTE

Pablo desea atravesar un puente colgante desde el punto A hasta el punto B. Para ello puede elegir entre varios y distintos itinerarios indicados en la figura de la izquierda según las siguientes reglas:



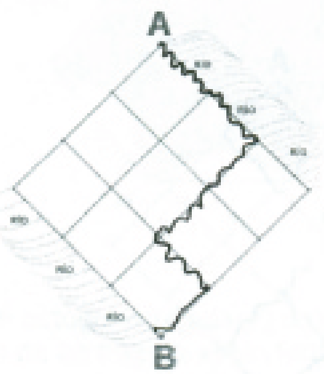
R1) Únicamente puede pasar por los caminos indicados en la cuadrícula del puente.

R2) Es un camino siempre "descendente", por tanto no puede retroceder en ningún caso.

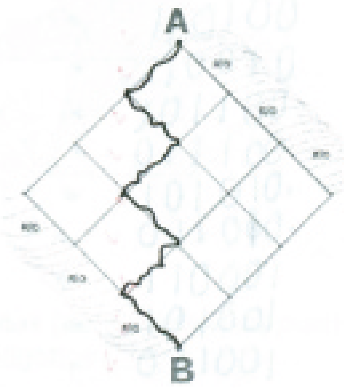
R3) Se indicará con 0, si elige un lado del camino hacia la izquierda y con 1, si lo toma hacia la derecha, según se indica en el esquema a la derecha

Atendiendo a estas reglas, contesta a las siguientes cuestiones:

a) Dibuja sobre la propia cuadrícula del dibujo los siguientes itinerarios 110010 y 010101.

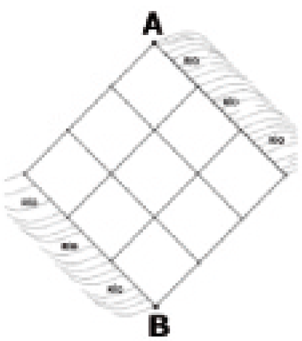


Itinerario 110010



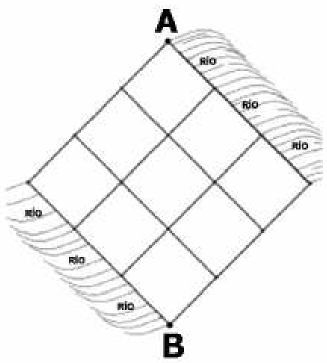
Itinerario 010101

b) Escribe, usando ceros y unos, todos los itinerarios posibles para ir de A hasta B que tengan <u>un solo tramo</u> en la orilla del río.



001101 ✓
010101 ✓
011001 ✓
101100 ✓
100110 ✓
101010 ✓

c) Escribe, usando ceros y unos, todos los itinerarios posibles para ir de A hasta B que tengan **exactamente dos tramos** por la orilla del río.



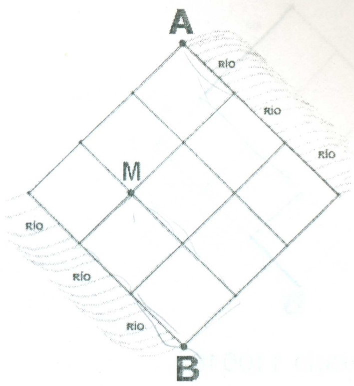
001011 ✓
010011 ✓
100101 ✓
101001 ✓
110100 ✓
110010 ✓

d) Si sabemos que Pablo ha pasado por el punto M, escribe, usando ceros y unos, todos los itinerarios posibles desde el punto A hasta el punto B pasando por M.

100101
100011
100110

001011
001110
001101

010011
010110
010101

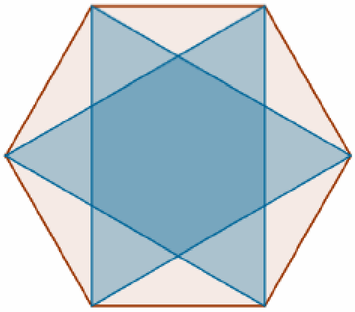


A→M
100
001
010

M→B
011
110
101

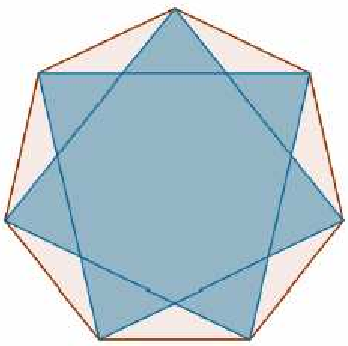
-He puesto todas las posibilidades de A hasta M y las he combinado con las que van de M a B

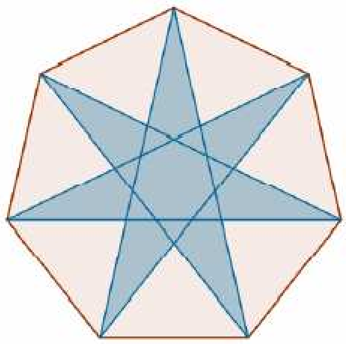
2. ESTRELLAS Y POLÍGONOS



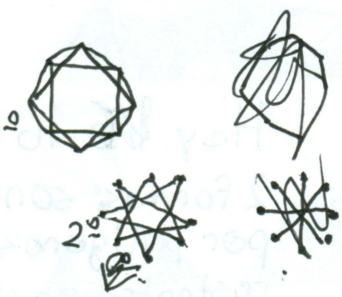
Usando los vértices de un hexágono regular se puede dibujar una estrella de 6 puntas. Observa, a la izquierda, que está formada por dos triángulos equiláteros, que en el centro se forma otro hexágono regular y que esta estrella no se puede trazar totalmente sin levantar el lápiz del papel.

En un heptágono regular se pueden construir dos estrellas distintas de 7 puntas. Las dos se pueden dibujar partiendo de un vértice y completando la estrella en un solo trazo (sin levantar el lápiz del papel).



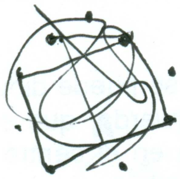


a) En un octógono regular, ¿cuántas estrellas distintas (de 8 puntas) se pueden formar? ¿Son de un trazo o están formadas por varios polígonos?

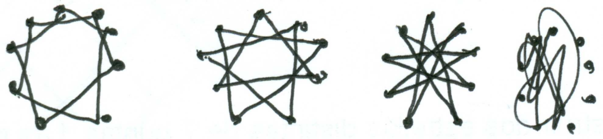


Se pueden hacer 2 la primera formada por 2 cuadrados la 2ª con un solo trazo.

b) En un eneágono regular, ¿cuántas estrellas distintas (de 9 puntas) se pueden formar? ¿Cómo son?



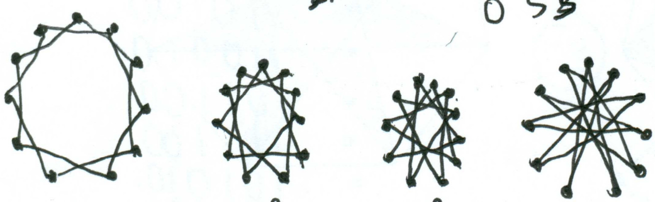
Se pueden ~~fo~~ formar 3 ~~la~~ la 1º de un solo trazo, la 2º formada por 3 triangulos y la 3º de un solo trazo.



1º 2º 3º

c) ¿Y en un polígono regular de 11 lados? ¿Cuántas se pueden formar y cómo son?

$$\begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \hline 10 & 5'5 \\ 0 & \end{array}$$



1º 2º 3º 4º

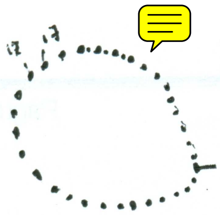
Se pueden hacer 4 y todos son de un solo tramo

d) ¿Y en un polígono regular de 35 lados? ¿Cuántas se pueden formar y cómo son?

$$\begin{array}{r|l} 35 & 2 \\ \hline 15 & 17'5 \\ 10 & \end{array} \qquad \cancel{\begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11'6 \\ 20 & \\ 2 & \end{array}} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ \hline 03 & 8'75 \end{array}$$

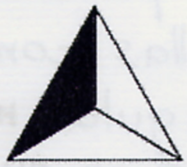
Hay ~~16~~ 16 formas 2 formas son formadas por poligonos y 14 restantes en un solo trazo.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 17



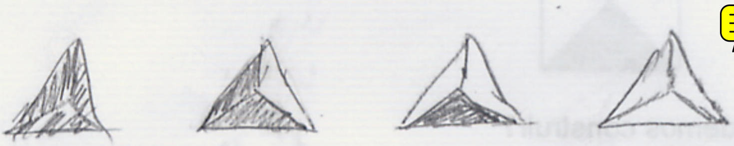
3. CONSTRUCCIONES CON TRIÁNGULOS Y CON CUADRADOS

Queremos construir fichas triangulares como las de la figura. Se trata de triángulos equiláteros divididos en tres partes iguales. Cada una de estas partes puede estar pintada de color negro o de color blanco; en la figura se muestra la pieza que tiene una parte negra y dos blancas, que puede ponerse en varias posiciones girándola.



a) ¿Cuántas fichas diferentes podemos construir?

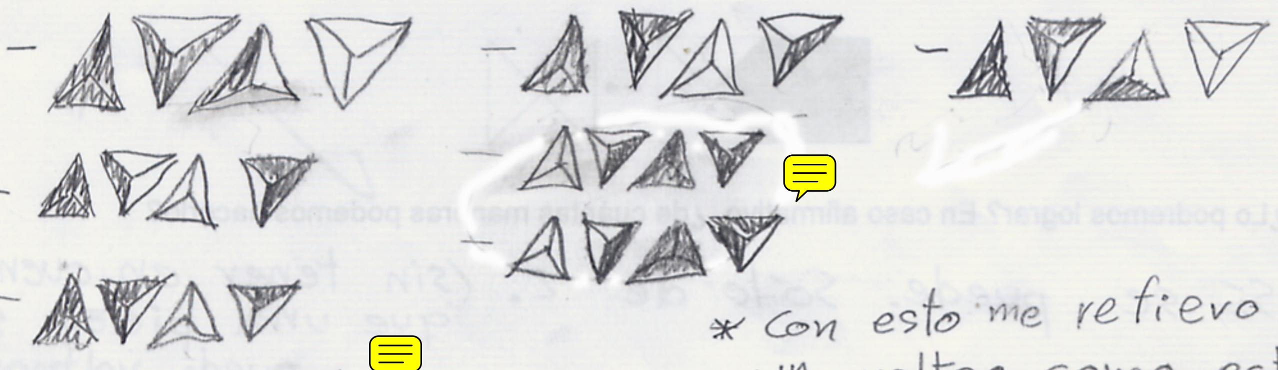
Sólo hay 4.



b) ¿Podemos situarlas todas en una fila, empezando por la ficha que tiene todas las partes negras, tal como se esquematiza en la figura siguiente, de forma que cada parte de un triángulo sea del mismo color que la parte del otro triángulo en contacto con ella?

En caso afirmativo, ¿de cuántas maneras podemos hacerlo?

Sí.



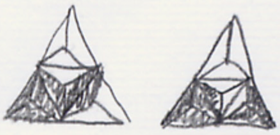
Son estas siete y el volteo de la sucesión* es decir, catorce.

* Con esto me refiero a un volteo como este del primero:

c) ¿Podemos formar con todas las fichas un triángulo equilátero mayor, con la condición de coincidencia de colores indicada en el apartado anterior? En caso afirmativo, explica todas las posibilidades empezando por situar la pieza que es toda de color negro.

Sí, se puede.

Creo que solo hay dos posibilidades, y que el resto de ellas consiste en voltear el triángulo mayor o desplazar los que se encuentra en los laterales del central. En resumen: ninguna de las fichas de solo un color puede ocupar el centr



Ahora, en lugar de triángulos vamos a jugar con cuadrados, divididos estos en cuatro partes, de forma que podemos pintar cada una de las partes de uno de los dos colores indicados.

d) ¿Cuántas fichas diferentes podemos construir?

Podemos hacer 6:

e) Ahora queremos situarlas todas en una fila, empezando por la que tiene todas las partes de color negro, con la condición habitual de que las partes en contacto sean del mismo color y de forma que cada pieza que pongamos tenga un número menor o igual de partes negras que la pieza anterior.

¿Lo podremos lograr? En caso afirmativo, ¿de cuántas maneras podemos hacerlo?

Sí, se puede. Sólo de 2. (sin tener en cuenta que una pieza se puede voltear o girar, pero sí manteniéndola siempre en el mismo puesto dentro de la sucesión, tampoco considero el voltear la sucesión como un tod

1) 

2) 

4. LA MÁQUINA QUE DA CAMBIO

Una máquina que proporciona cambio, acepta cambiar sólo billetes de 10 €, 20 €, 50 € y 100 €. Funciona de la siguiente manera:

- **Un billete de 10 € lo cambia por 2 de 5 €**
- **Un billete de 20 € lo cambia por 1 de 10 € y 2 de 5 €**
- **Un billete de 50 € lo cambia por 1 de 20 €, 2 de 10 € y 2 de 5 €**
- **Un billete de 100 € lo cambia por 1 de 50 €, 1 de 20 €, 2 de 10 € y 2 de 5 €**

De entrada, se llena la máquina con tantos billetes de 5 €, 10 €, 20 € y 50 € como sean necesarios (sin poner ni uno más) para que ésta pueda cambiar exactamente 1000 billetes (sea cual sea el tipo de billete que se quiera cambiar).

a) ¿Cuántos billetes de cada clase hay que poner en la máquina (sin poner ni uno más) para asegurar poder hacer esos 1000 cambios, independientemente del billete que se quiera cambiar?

Si hay para cambiar 1000 billetes de 100€, habrá para cambiar todos los demás. Para cambiar 1000 billetes de 100€ se necesita

1000 · 1 = 1000 billetes de 50€ 1000 · 1 = 1000 de 20€

1000 · 2 = 2000 de 10€ 1000 · 2 = 2000 de 5€

b) Si, con la máquina llena como al principio, cambiamos 200 billetes de 100 €, 40 billetes de 50 € y 100 billetes de 20 €, ¿cuántos billetes de cada clase quedarán en la máquina? (Cuenta los que van quedando y los que han entrado).

100€ = −200 · 1 = 200 de 50€ −200 · 1 = 200 de 20€ −200 · 2 = 400 de 10€
200 · 2 = 400 de 5€

50€ = −40 · 1 = 40 de 20€ −40 · 2 = 80 de 10€ 40 · 2 = 80 de 5€

20€ = −100 · 1 = 100 de 10€ 100 · 2 = 200 de 5€

Total = 200 de 50€; 240 de 20€; 580 de 10€; 680 de 5€

Quedan = 1000 − 200 = 800 de 50€; 1000 − 240 = 760 de 20€; 2000 − 580 = 1420 de 10€; 2000 − 680 = 1320 de 5€

c) De nuevo, con la máquina inicialmente llena, hacemos 1000 operaciones de cambio tras las cuales hay en la máquina un total de 300 billetes de 100 €, 900 de 50 €, 600 de 20 € y 1300 de 10 €. ¿Cuántos billetes de cada clase se han introducido en la máquina en estas 1000 operaciones de cambio?

	Inicialmente	Quedan	Se han gastado	Se han introducido para cambio	
100€	—	300	—	300	← Porque inicialmente no había billetes de 100€
50€	1000	900	100	200	← Si se han sacado 300, pero nos dice que sólo se han sacado 100, se han introducido (200 billetes)
20€	1000	600	400	100	← Se han sacado 500, pero nos dice que sólo 400, por lo que se han introducido 100 de 20
10€	2000	1300	700	400	← Se han sacado 700, pero los cálculos dan 1100, por lo que se han cambiado 400 de 10€
5€	2000	0	2000	—	

Total: 1000 operaciones.

Para cambiar 300 de 100 se han necesitado: 300 de 50€, 300 de 20€, 600 de 10€ y 600 de 5€

Para cambiar 200 de 50: 200 de 20€, 400 de 10€, 400 de 5€

d) Ahora rellenamos la máquina para que se puedan cambiar exactamente 2000 billetes, sean del tipo que sean. Una vez hechas las 2000 operaciones de cambio encontramos que en la máquina quedan 2000 billetes de 50 €, 1500 billetes de 20 €, 2000 billetes de 10 € y también algunos billetes de 100 €. ¿Cuántos billetes de cada clase se han cambiado?

	Inicialmente	Quedan	Se han gastado	Se han introducido para cambio
100€	—	500	—	500
50€	2000	2000	0	500
20€	2000	1500	500	500
10€	4000	2000	2000	500
5€	4000	0	4000	—
	El doble que en la tabla anterior			Total: 2000 cambios

Si hay la misma cantidad de billetes de 50, quiere decir que han entrado tantos como han salido.

4) c) Para cambiar 100 de 20€ : 100 de 10€, 200 de 5€

Para cambiar 400 de 10 € = 400 · 2 = 800 de 5€
(Además, si sumamos los que llevábamos hasta ahora de 5€, nos daba 1200, que si se lo restábamos a 2000 nos da 800, que si lo dividimos entre 2 nos da 400, que son los billetes de 10€ introducidos)

d) Si se han introducido 2.000 de 20, se habrían hecho todos los cambios

- Los 2000 de 10€ equivaldrían a los 2000 cambios de 20€, pero no se han hecho todos de 20€

Si salen 500 billetes de 50€ para 500 cambios de 100€, quedarían 3000 de 10€, 1500 de 20€ y 3000 de 5€

Otros 500 se habrían introducido para cambios de 50€, y quedarían; 1000 de 20€, 2000 de 10€ y 2000 de 5€

Se habrían introducido a su vez 500 de 20€ y quedarían 1500 de 10€ y 1000 de 5€.

Por último se habrían introducido 500 de 10€, que harían que se agotaran los billetes de 5€

5. DEDUCIENDO COMO SHERLOCK-HOLMES

Como puedes ver, en estas tablas hemos colocado en la primera fila y por orden, los números del **1** al **13**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

En la segunda fila has de poner también esos mismos números, en cierto orden y sin repetir ninguno, y en la tercera fila, en cada casilla, la suma de los números correspondientes a la primera y a la segunda fila.

Queremos que, en cada uno de los tres casos que te proponemos, trates de ver si es posible, o no es posible, colocarlos de forma que se cumpla la condición que te indicamos. Si es posible, debes poner un ejemplo y si no es posible, debes explicar por qué.

Caso-1
Situar los números de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas en la tercera fila sean iguales.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14

He usado el mismo método que usó Gauss para sumar los números del 1 al 100.

Caso-2
Situar los números de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas en la tercera fila sean números impares.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

No se puede, ya que para que salga todos impares deben emparejarse (emparejarse un par con un impar) y, por ese motivo, quedaría un número solo que no se podría sumar con otro.

Caso-3
De nuevo, situar los números de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas en la tercera fila sean números <u>múltiplos de tres</u>.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	1	6	5	4	3	8	13	9	11	10	12	8
3	3											

No es posible, creo que esto se debe a que la suma de todos ellos (14·3) no da un múltiplo de 3. Si lo diera, se podría dividir en grupos de tres, que al agruparse, darían las sumas de la tercera fila de la tabla.

Caso-4
Análogamente, situar los números de la segunda **fila de forma que todos los resultados que obtengas sean números <u>cuadrados perfectos</u>.**
(Recuerda que son cuadrados perfectos los números que se obtienen multiplicando un número por si mismo: por ejemplo 9 que es 3x3 ó 16 que es 4x4).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
8	2	13	12	11	10	9	1	7	6	5	4	3
9	4	16	16	16	16	16	9	16	16	16	16	16

He hecho algo parecido a lo del caso 1, pero cambiando y sumando mutuamente el 8 con el 1. Así, he ido sumando cada nº de la primera fila con otro para que siempre dieran 16.